,

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

40η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
18 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2023
Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{xyz+1}{x+1} = \dfrac{yzw+1}{y+1} = \dfrac{zwx+1}{z+1} = \dfrac{wxy+1}{w+1} \\ x+y+z+w=48 \end{matrix}\right\}.$$

Λύση (1ος τρόπος)
Από τις παραπάνω εξισώσεις λαμβάνουμε τις εξισώσεις:

$$xy^2z + xyz + y = xyzw + yzw + x$$

$$z^2yw + yzw + z = xyzw + y + zwx$$

$$w^2xz + zwx + w = xyzw + wxy + z.$$

$$x^2wy + wxy + x = xyzw + xyz + w.$$

Με πρόσθεση των τεσσάρων εξισώσεων κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$xy^2z + x^2wy + yz^2w + w^2xy = 4xyzw \Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{w} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{w}{y} = 4.$$

Όμως, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε:

$$\frac{y}{w} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{w}{y} \geq 4.$$

όπου η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν,

$$\frac{y}{w} = \frac{x}{z} = \frac{z}{x} = \frac{w}{y} \Leftrightarrow x^2 = z^2 \text{ και } y^2 = w^2 \Leftrightarrow x = z \text{ και } y = w.$$

Τότε έχουμε:

$$\frac{xyz+1}{x+1}=\frac{yzw+1}{y+1}\Leftrightarrow\frac{x^2y+1}{x+1}=\frac{y^2x+1}{y+1}=\frac{x^2y-y^2x}{x-y}=xy$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+x^2y+1+y=x^2y^2+y^2x+1+x$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)=x-y \ \Leftrightarrow\ (x-y)(xy-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=y \ \text{ή}\ xy=1.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. $x=y=z=w$. Τότε, από $x+y+z+w=48$, προκύπτει η λύση
$$(x,y,z,w)=(12,12,12,12).$$
2. $x=z\ \ και\ \ y=w$ και $xy=1$. Τότε
$$x+y=24\Leftrightarrow x+\tfrac{1}{x}=24\Leftrightarrow x^2-24x+1=0\Leftrightarrow x=12\pm\sqrt{143},$$
οπότε προκύπτουν οι λύσεις
$$(x,y,z,w)=\left(12+\sqrt{143},12-\sqrt{143},12+\sqrt{143},12-\sqrt{143}\right)\ \text{ή}$$
$$(x,y,z,w)=\left(12-\sqrt{143},12+\sqrt{143},12-\sqrt{143},12+\sqrt{143}\right).$$

2^{ος} τρόπος.
Έστω

$$k=\frac{xyz+1}{x+1}=\frac{yzw+1}{y+1}=\frac{zwx+1}{z+1}=\frac{wxy+1}{w+1}.$$

Αν $k=1$, τότε αφού $x,y,z,w>0$, έχουμε $xy=yz=zw=wx=1$. Έτσι $x=z$ και $y=w$, και η δεύτερη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$x+\frac{1}{x}=24$$

με αποδεκτές λύσεις $x=12\pm\sqrt{143}>0$.

Έστω $k\neq 1$. Λύνοντας ως προς x την $k=\frac{xyz+1}{x+1}$ παίρνουμε $x(yz-k)=k-1\neq 0$. Άρα

$$x=\frac{k-1}{yz-k}.$$

Ομοίως παίρνουμε

$$y=\frac{k-1}{zw-k},z=\frac{k-1}{wx-k},\text{και}\ w=\frac{k-1}{xy-k}.$$

Έτσι

$$x-y=\frac{k-1}{yz-k}-\frac{k-1}{zw-k}=-\frac{(k-1)(yz-zw)}{(yz-k)(zw-k)}=-\frac{xyz}{k-1}(y-w),\quad (1)$$

και

$$z-w=-\frac{(k-1)(wx-xy)}{(wx-k)(xy-k)}=-\frac{zwx}{k-1}(w-y) \qquad (2)$$

Από (1) και (2) παίρνουμε

$$\frac{x-y}{y}=-\frac{z-w}{w}\Leftrightarrow\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=2$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) παίρνουμε

$$(x-y)(z-w)=\frac{x^2yz^2w}{(k-1)^2}(y-w)^2\geq 0.$$

Αν έχουμε γνήσια ανισότητα στην τελευταία σχέση, δηλ. αν $y-w\neq 0$, τότε, θα έχουμε είτε $x>y$ και $z>w$ είτε $x<y$ και $z<w$. Τότε, όμως, παίρνουμε είτε $\frac{x}{y}+\frac{z}{w}>1+1=2$ είτε $\frac{x}{y}+\frac{z}{w}>< 1+1=2$, αντίστοιχα, οι οποίες αντιβαίνουν στην τελευταία παραπάνω ισότητα.

Άρα $y=w$, $x=y$ από την (1), και $z=w$ από την (2). Δηλ. $x=y=z=w=12$.

Συνεπώς, οι λύσεις είναι:

$(12,12,12,12)$, $(12+\sqrt{143},12-\sqrt{143},12+\sqrt{143},12-\sqrt{143})$, και

$(12-\sqrt{143},12+\sqrt{143},12-\sqrt{143},12+\sqrt{143})$.

Σχόλιο: Αποδεικνύεται επίσης ότι αν $k\neq 1$, τότε ισχύει

$$\frac{y-z}{z}=-\frac{w-x}{x}\Leftrightarrow\frac{y}{z}+\frac{w}{x}=2.$$

Συνεπώς, παίρνουμε

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{w}+\frac{w}{x}=4,$$

και η απόδειξη στην περίπτωση που $k\neq 1$ μπορεί να ολοκληρωθεί εναλλακτικά με την ανισότητα Αριθμητικού Μέσου-Γεωμετρικού Μέσου, όπως στον πρώτο τρόπο.

3ος τρόπος

Επειδή οι εξισώσεις του συστήματος παρουσιάζουν κυκλική συμμετρία, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας **να υποθέσουμε $\boldsymbol{x\geq max\{x,y,z,w\}}$** . Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις εξισώσεις του συστήματος προκύπτουν οι ισότητες:

$$x=z \text{ και } y=w,$$

οπότε συνεχίζουμε, όπως στον 1ο τρόπο.

Πρόβλημα 2

Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου n, να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους N που είναι τέλεια τετράγωνα και στη δεκαδική τους αναπαράσταση εμφανίζεται n φορές το ψηφίο 2 και μία φορά το 5.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι τέτοια τέλεια τετράγωνα είναι μόνο το $5^2 = 25$ και το $25^2 = 225$. Έστω N ένα τέτοιο τέλειο τετράγωνο. Επειδή ένα τέλειο τετράγωνο δεν μπορεί να έχει τελευταίο ψηφίο το 2, πρέπει το N να έχει τη μορφή

$$N = 22\dots225 = 22\dots200 + 25 = 100 \cdot 2 \cdot 11\dots1 + 25 = 100 \cdot 2 \cdot \frac{10^{n-1}-1}{9} + 25,$$

όπου το ψηφίο 2 υπάρχει $n-$ φορές, $n \geq 1$.

Θεωρώντας τις πιθανές μορφές mod10, δηλαδή $N = (10k+\upsilon)^2, 0 \leq \upsilon < 10$, όπου k θετικός ακέραιος, διαπιστώνουμε ότι μόνο στην περίπτωση $N = (10k+5)^2$ προκύπτει θετικός ακέραιος που λήγει σε 25. Τότε έχουμε:

$$100 \cdot 2 \cdot \frac{10^{n-1}-1}{9} + 25 = (10k+5)^2, \qquad (1)$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$9k^2 + 9k - 2(10^{n-1}-1) = 0. \qquad (2)$$

Επειδή k θετικός ακέραιος, η διακρίνουσα της εξίσωσης (2) πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή πρέπει $\Delta = 9(8 \cdot 10^{n-1}+1)$ να είναι τέλειο τετράγωνο ή πρέπει

$$8 \cdot 10^{n-1} + 1 = x^2,$$

για κάποιο περιττό ακέραιο $x > 1$. Αν $x = 2m+1, m \geq 1$, τότε έχουμε:

$$8 \cdot 10^{n-1} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 4m(m+1) \Rightarrow$$
$$2^n \cdot 5^{n-1} = m(m+1), \qquad (3)$$

με $(m, m+1) = 1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς το n:

- Αν $n = 1$, τότε $m = 1, k = 0$ και $N = 25$.
- Αν $n = 2$, τότε $m = 4, k = 1$ και $N = 225$.
- Αν $n \geq 3$, επειδή

$$5^{n-1} > 4^{n-1} = 2^{2n-2} > 2^n,$$

από την εξίσωση (3) προκύπτει ότι:

$$2^n = m \quad \text{και} \quad 5^{n-1} = m+1\,,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$m = 5^{n-1} - 1 = 4 \cdot (5^{n-2} + \dots + 1) > 4 \cdot 4^{n-2} = 4^{n-1} > 2^n = m, \text{ άτοπο.}$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB > AC$, η διχοτόμος του AD, όπου D είναι σημείο της πλευράς BC, και το σημείο I τομής των διχοτόμων του. Αν M είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AD και F είναι το σημείο τομής της MB με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BIC, να αποδείξετε ότι: $AF \perp FC$.

Λύση

1ος τρόπος. Το παράκεντρο I_a ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BIC, αφού $I\hat{C}I_a = I\hat{B}I_a = 90°$. Επιπλέον, στο τρίγωνο CDA, οι CI, CI_a είναι η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος, αντίστοιχα, επομένως τα σημεία A, D είναι τα συζυγή αρμονικά των I, I_a. Αφού το M είναι μέσον του τμήματος AD, από τη σχέση του Newton για την αρμονική σημειοσειρά έχουμε:

$$MA^2 = MI \cdot MI_a. \qquad (1)$$

Όμως από τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο έχουμε:

$$MI \cdot MI_a = MF \cdot MB. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$MA^2 = MF \cdot MB,$$

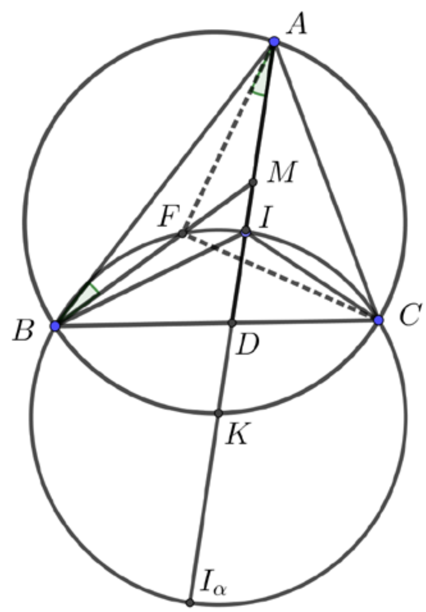
δηλαδή η ΜΑ εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AFB. Από την τελευταία έχουμε ότι

$$M\hat{B}A = F\hat{A}M. \qquad (3)$$

Τέλος, με τη βοήθεια της (3) έχουμε

$$F\hat{A}C + F\hat{C}A = F\hat{A}M + \frac{\hat{A}}{2} + F\hat{C}I + \frac{\hat{C}}{2} =$$

$$\overset{(3)}{=} M\hat{B}A + \frac{\hat{A}}{2} + F\hat{B}I + \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90°.$$



Σχήμα 1

Άρα $AF \perp FC$.

2ος τρόπος

Έστω L το μέσο του τόξου BC του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC που δεν περιέχει το A, και έστω I_A παράκεντρο του τριγώνου ABC. Είναι γνωστό ότι τα σημεία A, I, L, I_A είναι συνευθειακά και ότι το L είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου (c) του τριγώνου BIC.

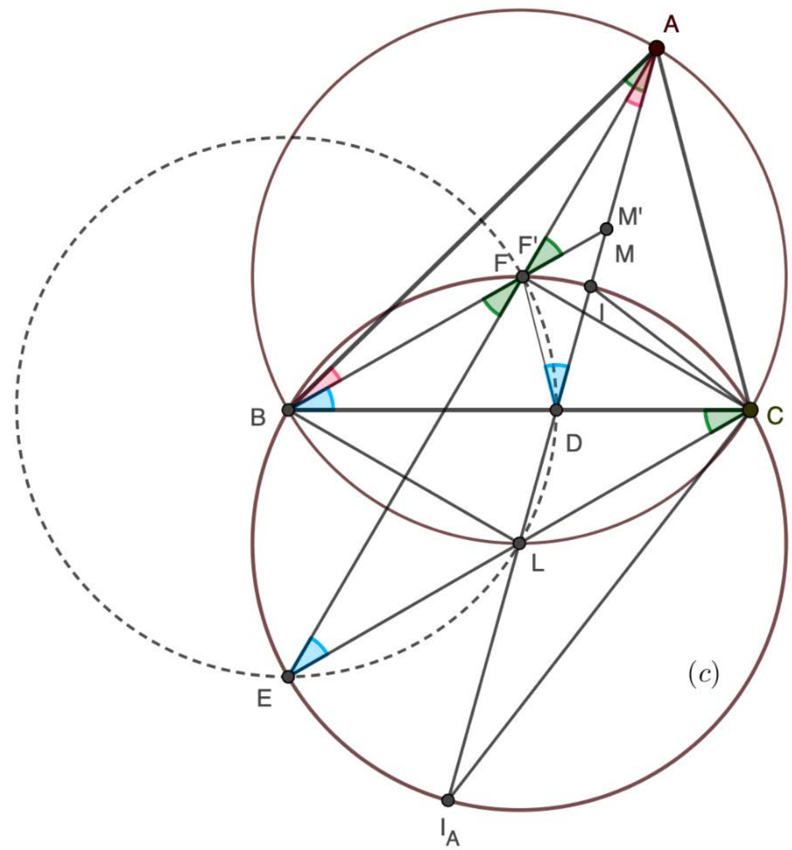
Έστω E το αντιδιαμετρικό σημείο του C στον (c), έστω F' το σημείο τομής της ευθείας AE με τον (c) και έστω M' το σημείο τομής της BF' με την AD. Η $E\widehat{F'}C$ βαίνει σε ημικύκλιο του (c) και άρα είναι ορθή. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το M' ταυτίζεται με το μέσο M της AD για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη.

Με κυνήγι γωνιών παίρνουμε

$$B\hat{A}M' = B\hat{C}L = B\widehat{F'}E = A\widehat{F'}M',$$

οπότε $A\hat{B}M' = M'\hat{A}F'$, δηλ. η AM' εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $BF'A$ στο A, και άρα $M'F' \cdot M'B = M'A^2$. Αρκεί να αποδείξουμε επίσης, ότι $M'F' \cdot M'B = M'D^2$, ή ισοδύναμα, ότι η AM' εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $BF'D$ στο D.

Για το σκοπό αυτό, αφού $F'\hat{B}D = F'\hat{E}L$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $A\widehat{D}F' = F'\hat{E}L$ ή, ισοδύναμα, ότι τα σημεία F', D, L, E είναι ομοκυκλικά.
Πράγματι, αφού τα E, F', I, I_A είναι ομοκυκλικά, έχουμε $AF' \cdot AE = AI \cdot AI_A$. Αφού $ID \cdot I_AD = BD \cdot DC$, από τα θεωρήματα εσωτερικής διχοτόμου στα τρίγωνα ABC, ACD και εξωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ABDέπεται ότι $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$. Τέλος, από την ομοιότητα των τριγώνων ABL και ADC ισχύει $AB \cdot AC = AD \cdot AL$.
Συνεπώς $AF' \cdot AE = AD \cdot AL$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε



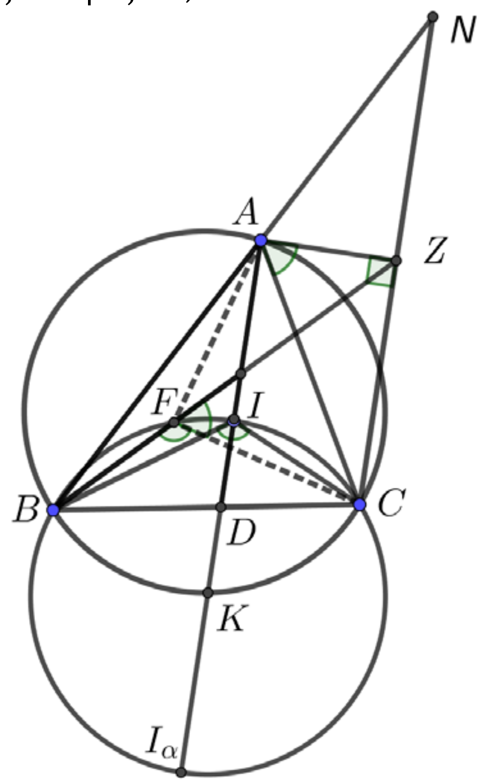
Σχήμα 2

3ος τρόπος

Από την κορυφή C φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διχοτόμο AD η οποία τέμνει την ευθεία AB στο σημείο N και την ευθεία AM στο σημείο Z.
Από τις ισότητες των γωνιών

$$A\hat{C}N = D\hat{A}C = \frac{\hat{A}}{2}, A\hat{N}C = B\hat{A}D = \frac{\hat{A}}{2}$$

έπεται ότι το τρίγωνο ACN είναι ισοσκελές. Επειδή το M είναι το μέσο της AD έπεται ότι το Z είναι το μέσο της πλευράς CN, οπότε $AZ \perp CN \Rightarrow A\hat{Z}C = 90^0$.



Σχήμα 3

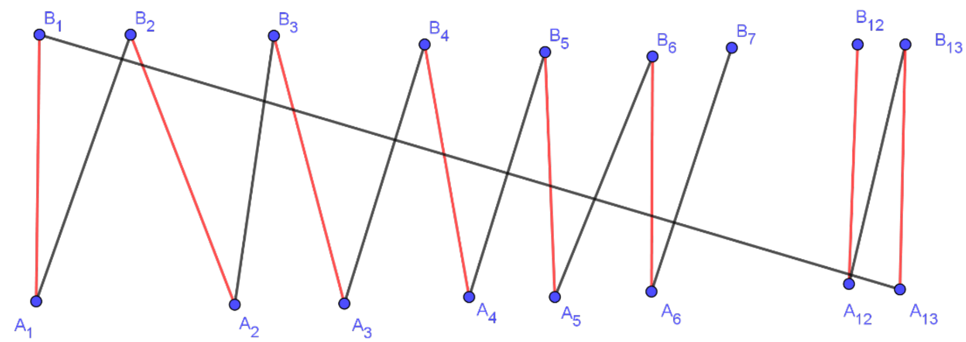
Επομένως, για να είναι $A\hat{F}C = 90^0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $CFAZ$ είναι εγγράψιμο.
Πράγματι, έχουμε:

$$C\hat{F}Z = 180^0 - B\hat{F}C = 180^0 - B\hat{I}C = 180^0 - \left(90^0 + \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} = C\hat{A}Z.$$

Πρόβλημα 4
Ένα τμήμα της Β΄ Λυκείου έχει 26 μαθητές, που κάθονται ανά δύο στα θρανία. Στο δεύτερο τετράμηνο έχουν αποφασίσει να αλλάξουν θέσεις ώστε κάθε δύο μαθητές που καθόταν μαζί στο πρώτο τετράμηνο, να μην κάθονται μαζί και στο δεύτερο. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του N, ώστε ανεξαρτήτως από το πώς κάθισαν οι μαθητές στα δύο τετράμηνα, να υπάρχει στο τέλος της χρονιάς ένα σύνολο S από N μαθητές, στο οποίο δεν υπάρχουν δύο μαθητές οι οποίοι κάθισαν μαζί σε κάποιο από τα δύο τετράμηνα.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι η μέγιστη τιμή είναι 13. Πράγματι, αν το σύνολο περιέχει 14 μαθητές, επειδή αυτοί κάθονται σε 13 θρανία, από την αρχή της περιστεροφωλιάς, θα υπάρχουν δύο μαθητές που κάθισαν στο ίδιο θρανίο. Επομένως η μέγιστη τιμή είναι το πολύ 13.



Σχήμα 4

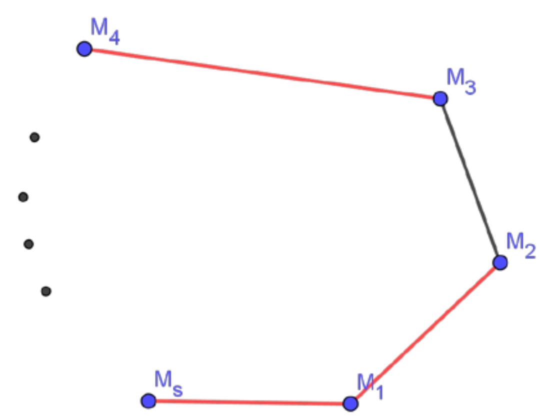
(Με κόκκινο έχουμε σημειώσει τους μαθητές που καθόταν μαζί στο πρώτο τετράμηνο και με μαύρο αυτούς που κάθισαν μαζί στο δεύτερο τετράμηνο)

Για την άλλη κατεύθυνση, θα αποδείξουμε ότι όπως και να κάθισαν οι μαθητές στα δύο τετράμηνα, μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο από 13 μαθητές, ώστε να μην υπάρχουν δύο που κάθισαν μαζί κατά την διάρκεια της χρονιάς.

Πράγματι, παριστάνουμε τους μαθητές σαν σημεία στο επίπεδο και τους ενώνουμε με κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα, αν κάθισαν μαζί στο πρώτο τετράμηνο και με μαύρο, αν κάθισαν μαζί στο δεύτερο τετράμηνο.

Έστω ότι υπάρχει κύκλος που αποτελείται από περιττό πλήθος ευθυγράμμων τμημάτων. Τότε κάθε κορυφή συνδέεται με ένα μαύρο και ένα κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα (με τους δύο γείτονες στον κύκλο). Επομένως, αν ξεκινήσουμε με κόκκινο, επειδή το πλήθος των τμημάτων είναι περιττό, θα καταλήξουμε πάλι με κόκκινο.

Αυτό είναι άτοπο, αφού κάθε κορυφή έχει σύνδεση με ένα κόκκινο (για το πρώτο τετράμηνο) και ένα μαύρο (για το δεύτερο τετράμηνο) ευθύγραμμο τμήμα. Εφόσον δεν υπάρχει περιττός κύκλος, αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των κορυφών μπορεί να χωριστεί σε δύο υποσύνολα A, B, ώστε να μην υπάρχουν τμήματα μεταξύ των κορυφών στο σύνολο Α και να μην υπάρχουν τμήματα μεταξύ των κορυφών στο σύνολο Β. Αφού οι μαθητές είναι 26, υπάρχει ένα από αυτά με πληθάριθμό τουλάχιστον 13, και το ζητούμενο έπεται.



Σχήμα 5

2^{ος} τρόπος

Όπως στον πρώτο τρόπο, ισχύει $N \leq 13$ από την αρχή της περιστεροφωλιάς. Θα δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα.

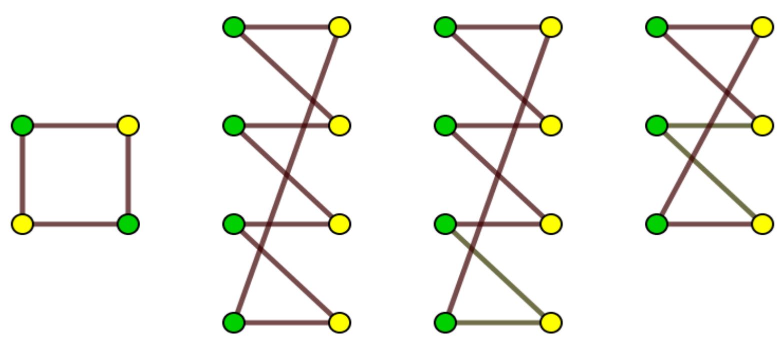
Θεωρούμε γράφημα είκοσι έξι κορυφών, οι οποίες αντιστοιχούν στους μαθητές του τμήματος, και με μια ακμή μεταξύ δύο κορυφών αν και μόνο αν οι αντίστοιχοι μαθητές έχουν καθίσει μαζί στο πρώτο ή το δεύτερο τετράμηνο.

Κάθε συνεκτική συνιστώσα έχει άρτιο αριθμό κορυφών, αφού οι μαθητές κάθονται ανά δύο σε κάθε τετράμηνο. Αλλιώς, θα υπήρχε κάποιος μαθητής που καθόταν μόνος του σε κάποιο τετράμηνο, άτοπο.

Αφού οι μαθητές κάθονται με δύο διαφορετικούς συμμαθητές τους όλη τη χρονιά, έναν σε κάθε τετράμηνο, κάθε κορυφή είναι βαθμού 2. Άρα κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι κύκλος του Euler. Πράγματι, αν ξεκινήσουμε να κινούμαστε από μια κορυφή περνώντας από κάθε ακμή μόνο μια φορά, λόγω του ότι ο βαθμός κάθε κορυφής είναι 2, θα πρέπει να καταλήξουμε στην κορυφή από την οποία ξεκινήσαμε.

Αρκεί, λοιπόν, να θεωρήσουμε κάθε συνεκτική συνιστώσα ως ένα κατευθυνόμενο κύκλο $v_1, v_2,\ldots, v_{2k}$ και να θεωρήσουμε τις μισές κορυφές εναλλάξ, δηλ. τις $v_2, v_4, \ldots, v_{2k}$, οι οποίες δε συνδέονται με ακμή. Αφού από καθεμιά συνιστώσα παίρνουμε τις μισές κορυφές, $N = 13$.

Στο παρακάτω παράδειγμα, το γράφημα μας έχει τέσσερις συνεκτικές συνιστώσες. Μπορούμε να επιλέξουμε απλώς όλες τις πράσινες ή όλες τις κίτρινες κορυφές.



Σχήμα 6