ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

37η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020
Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την ανίσωση:
$$\frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}\geq -\frac{x}{16}$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Έστω Δ το μέσον της πλευράς ΒΓ και ΒΕ, ΓΖ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ. Η ευθεία ΖΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Θ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΖΔΕ συναρτήσει της γωνίας $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να βρείτε τη γωνία $Β\hat{Θ}Ζ$ συναρτήσει των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες υπάρχουν τριάδες θετικών ακέραιων (α,β,γ) που είναι λύσεις της εξίσωσης:
$$\alpha+\beta+\gamma=\nu\alpha\beta\gamma. \qquad \text{(Ε)}$$
Για τις τιμές του ν που θα βρείτε, να προσδιορίσετε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (Ε).

Πρόβλημα 4
Γράφουμε 99 κύκλους σε μία σειρά και στο εσωτερικό τους γράφουμε τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 99:

Χρωματίζουμε καθέναν από τους κύκλους με ένα από τα δύο χρώματα που διαθέτουμε: το κόκκινο και το πράσινο. Λέμε ότι ένας χρωματισμός είναι «*καλός*», αν έχει την ιδιότητα:

Οι κόκκινοι κύκλοι στο τμήμα των αριθμών από το 1 μέχρι και το 50 είναι περισσότεροι από τους κόκκινους κύκλους στο τμήμα των αριθμών από το 51 μέχρι και το 99.

(α) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν.

(β) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί «*καλοί*» χρωματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν.

(Σημείωση: Δύο χρωματισμοί είναι διαφορετικοί, αν έχουν διαφορετικό χρώμα σε έναν τουλάχιστον κύκλο τους).

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες **Καλή επιτυχία**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

37η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020
Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλα τα μη σταθερά πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα:

$$P\left(\left(Q(x)\right)^3\right) = xP(x)\left(Q(x)\right)^3.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και πάνω σε αυτό σημείο Γ τέτοιο ώστε $\mathrm{AB} = 3 \cdot \mathrm{A\Gamma}$. Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΑΓΔΕ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Gamma} = \Delta\mathrm{E} = \Gamma\mathrm{E} > \mathrm{AE}$. Θεωρούμε σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΑΓ έτσι ώστε $\mathrm{A\hat{E}Z} = \mathrm{A\hat{\Gamma}E} = \omega$. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο Β προς την ευθεία ΕΓ και η κάθετη από το σημείο Δ προς την ευθεία ΑΒ τέμνονται σε σημείο, έστω Κ, πάνω στην ευθεία ΕΖ.

Πρόβλημα 3

Στον πίνακα είναι γραμμένοι σε μία ευθεία οι ακέραιοι από το 1 μέχρι και το 2030 σε αύξουσα σειρά. Έχουμε το δικαίωμα της «*κίνησης*» Κ:
Επιλέγουμε δύο οποιουσδήποτε αριθμούς α, β που είναι γραμμένοι σε διαδοχικές θέσεις και αντικαθιστούμε το ζευγάρι (α, β) με τον αριθμό $(\alpha - \beta)^{2020}$.

Εκτελούμε την κίνηση Κ αρκετές φορές μέχρι που να μείνει στον πίνακα μόνο ένας αριθμός. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να είναι ο αριθμός αυτός:
(α) ο 2020^{2020}, **(β)** ο 2021^{2020}.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλες τις τιμές του θετικού ακεραίου κ που ικανοποιούν την ιδιότητα:
Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α, β ώστε η παράσταση

$$\mathrm{A}(\kappa, \alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \kappa^2\beta^2 - \kappa^2\alpha\beta}$$

να είναι ένας σύνθετος θετικός ακέραιος.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες **Καλή επιτυχία**