ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

37η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020

Θέματα μικρών τάξεων
Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1.

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την ανίσωση:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}\geq -\frac{x}{16}.$$

Λύση

Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}\geq -\frac{x}{16}\Leftrightarrow \frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}+\frac{x}{16}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16(x+2)^4-8(x+2)^2x^2+x^4}{16x^3}\geq 0\Leftrightarrow \frac{\left(4(x+2)^2-x^2\right)^2}{16x^3}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(4(x+2)^2-x^2\right)^2\geq 0,\ x\neq 0\Leftrightarrow x\geq 0,\ x\neq 0 \text{ ή } 4(x+2)^2-x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } (2x+4+x)(2x+4-x)=0\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } (3x+4)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } x=-\frac{4}{3} \text{ ή } x=-4.$$

Διαφορετικά μπορούμε για $x\neq 0$ να εργαστούμε ως εξής:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}\geq -\frac{x}{16}\Leftrightarrow \frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}+\frac{x}{16}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\left[\frac{(x+2)^4}{x^4}-\frac{(x+2)^2}{2x^2}+\frac{1}{16}\right]\geq 0\Leftrightarrow x\left[\left(\frac{x+2}{x}\right)^2-\frac{1}{4}\right]^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } \frac{x+2}{x}=\pm\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } x=-\frac{4}{3} \text{ ή } x=-4$$

Πρόβλημα 2.

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<A\Gamma$. Έστω Δ το μέσον της πλευράς ΒΓ και ΒΕ, ΓΖ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ. Η ευθεία ΖΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Θ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $Z\Delta E$ συναρτήσει της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να βρείτε τη γωνία $B\hat{\Theta}Z$ συναρτήσει των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ορθογώνιο και η ΖΔ είναι η διάμεσος του προς την υποτείνουσα, οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $Z\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2} = B\Delta$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 = B\hat{\Delta}Z = 180^0 - 2\hat{B} \qquad (1)$$

Με το ίδιο σκεπτικό έχουμε $\Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2} = \Gamma\Delta$ και από το ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ βρίσκουμε και την ισότητα

$$\hat{\Delta}_2 = \Gamma\hat{\Delta}E = 180^0 - 2\hat{\Gamma} \qquad (2)$$

Άρα είναι

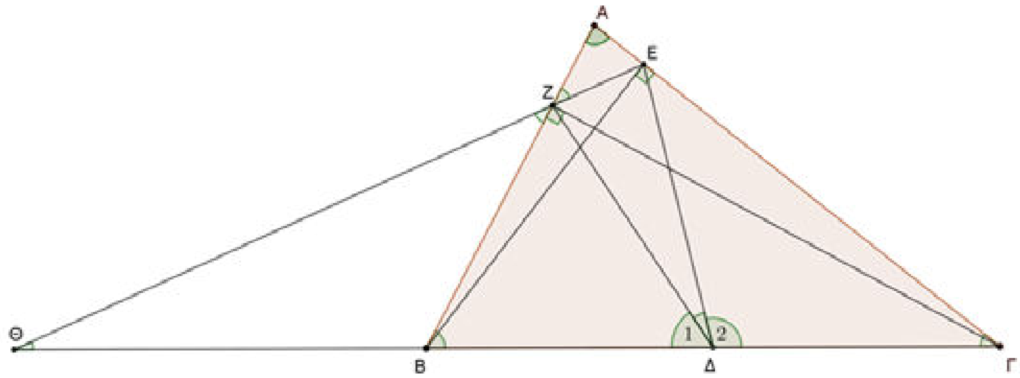
$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \left(180^0 - 2\hat{B}\right) + \left(180^0 - 2\hat{\Gamma}\right) = 360^0 - 2\left(\hat{B} + \hat{\Gamma}\right) = 360^0 - 2\left(180^0 - \hat{A}\right) = 2\hat{A} \ ,$$

οπότε

$$Z\hat{\Delta}E = 180^0 - \left(\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2\right) = 180^0 - 2\hat{A}.$$

Επιπλέον, επειδή το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές (αφού $\Delta Z = \Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2}$), έχουμε:

$$\Delta\hat{Z}E = \Delta\hat{E}Z = \frac{180 - (180^0 - 2\hat{A})}{2} = \hat{A}.$$



Σχήμα 1

(β) Από το τρίγωνο ΒΘΖ και τη σχέση μιας εξωτερικής γωνίας με τις απέναντι εσωτερικές έχουμε

$$\hat{B} = B\hat{\Theta}Z + B\hat{Z}\Theta. \qquad (3)$$

Όμως είναι

$$B\hat{Z}\Theta = A\hat{Z}E \qquad (4)$$

ως κατά κορυφή, ενώ από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΖΕΓ (αφού $B\hat{Z}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = 90^0$) έχουμε

$$A\hat{Z}E = \hat{\Gamma} \ . \qquad (5)$$

Από τις τρεις τελευταίες σχέσεις λαμβάνουμε:

$$\mathrm{B}\hat{\Theta}\mathrm{Z} = \hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma}\ .$$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες υπάρχουν τριάδες θετικών ακέραιων (α,β,γ) που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\alpha+\beta+\gamma=\nu\alpha\beta\gamma\,. \qquad \text{(Ε)}$$

Για τις τιμές του ν που θα βρείτε, να προσδιορίσετε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (Ε).

Λύση

Επειδή η εξίσωση είναι συμμετρική ως προς α,β,γ θα βρούμε ασχοληθούμε με την περίπτωση που ισχύει $\alpha\geq\beta\geq\gamma$. Τότε έχουμε:

$$\alpha\leq\alpha+\beta+\gamma\leq 3\alpha \Leftrightarrow \alpha\leq\nu\alpha\beta\gamma\leq 3\alpha \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} 1\leq\nu\beta\gamma\leq 3\,.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\nu>3$. Τότε $\nu\beta\gamma>3$, άτοπο.
- $\nu=3$. Τότε $1\leq 3\beta\gamma\leq 3\Rightarrow \beta\gamma=1\Rightarrow\beta=\gamma=1$, οπότε $\alpha+2=3\alpha\Leftrightarrow\alpha=1$.
  Άρα έχουμε τη λύση $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,1,1)$.
- $\nu=2$. Τότε $1\leq 2\beta\gamma\leq 3\Rightarrow\beta\gamma=1\Rightarrow\beta=\gamma=1$, οπότε $\alpha+2=2\alpha\Leftrightarrow\alpha=2$.
  Άρα έχουμε τη λύση $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,1,1)$ και λόγω συμμετρίας τις λύσεις $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,2,1)$ και $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,1,2)$.
- $\nu=1$. Τότε $1\leq\beta\gamma\leq 3\Rightarrow\beta\gamma\in\{1,2,3\}$.
  Αν $\beta\gamma=1$, τότε $\beta=\gamma=1$ και $\alpha+2=1$, αδύνατη.
  Αν $\beta\gamma=2$, τότε $\beta=2,\ \gamma=1$ και $\alpha+3=2\alpha\Leftrightarrow\alpha=3$.
  Επομένως, $(\alpha,\beta,\gamma)=(3,2,1)$ και λόγω συμμετρίας λύσεις είναι και οι τριάδες:
  $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,1,3),(\alpha,\beta,\gamma)=(3,2,1),(\alpha,\beta,\gamma)=(3,1,2),(\alpha,\beta,\gamma)=(1,2,3),(\alpha,\beta,\gamma)=(2,3,1)$.
  Αν $\beta\gamma=3$, τότε $\beta=3,\ \gamma=1$ και $\alpha+4=3\alpha\Leftrightarrow\alpha=2$. (απορρίπτεται, γιατί $\alpha<\beta$).

Επομένως οι τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες υπάρχουν τριάδες θετικών ακέραιων (α,β,γ) που είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha+\beta+\gamma=\nu\alpha\beta\gamma$ είναι: $\nu=1$ ή 2 ή 3.

Πρόβλημα 4

Γράφουμε 99 κύκλους σε μία σειρά και στο εσωτερικό τους γράφουμε τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 99:

Χρωματίζουμε καθέναν από τους κύκλους με ένα από τα δύο χρώματα που διαθέτουμε: το κόκκινο (Κ) και το πράσινο (Π). Λέμε ότι ένας χρωματισμός είναι «*καλός*», αν έχει την ιδιότητα:

Οι κόκκινοι κύκλοι στο τμήμα των αριθμών από το 1 μέχρι και το 50 είναι περισσότεροι από τους κόκκινους κύκλους στο τμήμα των αριθμών από το 51 μέχρι και το 99.

(α) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν.
(β) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί «*καλοί*» χρωματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν.
(Σημείωση: Δύο χρωματισμοί είναι διαφορετικοί, αν έχουν διαφορετικό χρώμα σε έναν τουλάχιστον κύκλο).

Λύση

(α) Κάθε κύκλος μπορεί να χρωματιστεί με 2 διαφορετικά χρώματα, ανεξάρτητα από το χρωματισμό των υπολοίπων κύκλων. Επομένως σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή οι διαφορετικοί χρωματισμοί που μπορούν να κατασκευαστούν είναι:

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\ldots\cdot 2}_{99-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}=2^{99}.$$

(β) Θεωρούμε ένα χρωματισμό $X:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{x-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\ \underbrace{51.............98\ 99}_{y-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}$. Ο χρωματισμός Χ είναι «*καλός*», αν $x>y$, ενώ ο χρωματισμός Χ είναι *όχι καλός*, αν $x\le y$.

Έστω Α το σύνολο των «καλών» χρωματισμών και Β το σύνολο των όχι καλών χρωματισμών. Θα αποδείξουμε ότι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου Β και αντιστρόφως.

Πράγματι, αν $X:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{x-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\ \underbrace{51.............98\ 99}_{y-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\in A$, τότε $x>y$. Αλλάζοντας το χρώμα κάθε αριθμού, προκύπτει ο χρωματισμός $Y:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{(50-x)-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\ \underbrace{51.............98\ 99}_{(49-y)-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}$, ο οποίος ανήκει στο σύνολο Β των *όχι καλών* χρωματισμών, γιατί:

$$x>y\Rightarrow -x<-y\Rightarrow 49-x<49-y\Rightarrow 50-x\le 49-y.$$

Έτσι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίσαμε ένα στοιχείο του συνόλου Β.

Αντίστροφα, αν $X:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{x-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\ \underbrace{51.............98\ 99}_{y-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\in B$, τότε $x\le y$. Αλλάζοντας το χρώμα κάθε αριθμού, προκύπτει ο χρωματισμός $Y:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{(50-x)-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}\ \underbrace{51.............98\ 99}_{(49-y)-\kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu o\iota}$, ο οποίος ανήκει στο σύνολο Α των *καλών* χρωματισμών, γιατί:

$$x\le y\Rightarrow -x\ge -y\Rightarrow 49-x\ge 49-y\Rightarrow 50-x>49-y.$$

Έτσι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Β αντιστοιχίσαμε ένα στοιχείο του συνόλου Α.

Επομένως, μεταξύ των συνόλων Α και Β υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, οπότε τα δύο σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, δηλαδή το πλήθος των καλών χρωματισμών είναι $\frac{2^{99}}{2}=2^{98}$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

37η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020

Θέματα μεγάλων τάξεων
Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλα τα μη σταθερά πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα:

$$P\left((Q(x))^3\right) = xP(x)(Q(x))^3.$$

Λύση

Έστω ότι: $\deg P(x) = m \geq 1$, $\deg Q(x) = n \geq 1$. Θεωρώντας τους βαθμούς των δύο μελών της δεδομένης σχέσης, λαμβάνουμε την ισότητα:

$$3mn = 1 + m + 3n \Leftrightarrow (m-1)(3n-1) = 2$$
$$\Leftrightarrow m-1 = 1, 3n-1 = 2 \text{ ή } m-1 = 2,\ 3n-1 = 1 (\text{αδύνατη στο } \mathbb{N}^*)$$
$$\Leftrightarrow m = 2,\ n = 1.$$

Έστω ότι $P(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $Q(x) = dx + e, d, e \in \mathbb{R}, d \neq 0$. Τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$a\left((Q(x))^3\right)^2 + b(Q(x))^3 + c = xP(x)(Q(x))^3, \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει ότι το μη σταθερό πολυώνυμο $Q(x)$ διαιρεί το σταθερό πολυώνυμο c, οπότε $c = 0$. Τότε από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$a\left((Q(x))^3\right)^2 + b(Q(x))^3 - xP(x)(Q(x))^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (Q(x))^3\left(a(Q(x))^3 + b - xP(x)\right)$$
$$\overset{Q(x)\neq 0}{\Longleftrightarrow} a(Q(x))^3 + b - xP(x) = 0$$
$$xP(x) = a(Q(x))^3 + b \qquad (2)$$

Η σχέση (2) γίνεται:

$$x\left(ax^2+bx\right)=a\left(dx+e\right)^3+b$$
$$\Leftrightarrow ax^3+bx^2=ad^3x^3+3ad^2ex^2+3ade^2x+ae^3+b$$
$$\Leftrightarrow a=ad^3,\ b=3ad^2e,\ 3ade^2=0,\ ae^3+b=0$$
$$\overset{a,d\neq 0}{\Longleftrightarrow}\ d=1,\ e=0,\ b=0, a\in\mathbb{R}.$$

Άρα είναι: $P(x)=ax^2,\ Q(x)=x,\ a\in\mathbb{R}$ και εύκολα επαληθεύουμε ότι ικανοποιούν το πρόβλημα μας.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και πάνω σε αυτό σημείο Γ τέτοιο ώστε $\mathrm{AB}=3\cdot\mathrm{A\Gamma}$. Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΑΓΔΕ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{\Delta E}=\mathrm{\Gamma E}>\mathrm{AE}$. Θεωρούμε σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΑΓ έτσι ώστε $\mathrm{A\hat{E}Z}=\mathrm{A\hat{\Gamma}E}=\omega$. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο Β προς την ευθεία ΕΓ και η κάθετη από το σημείο Δ προς την ευθεία ΑΒ τέμνονται σε σημείο, έστω Κ, πάνω στην ευθεία ΕΖ.

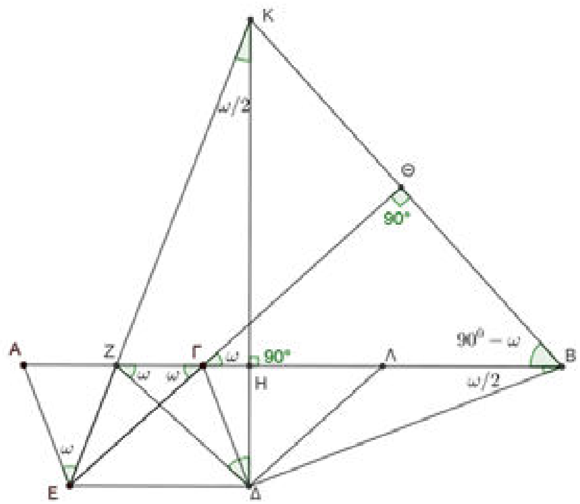
Λύση

Αν $\mathrm{A\hat{\Gamma}E}=\omega$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΘΒ έχουμε:

$$\mathrm{\Gamma\hat{B}\Theta}=90^0-\mathrm{B\hat{\Gamma}\Theta}=90^0-\omega, \qquad (1)$$

αφού $\mathrm{B\hat{\Gamma}\Theta}=\mathrm{A\hat{\Gamma}E}=\omega$, ως κατά κορυφή και επιπλέον $\mathrm{B\hat{H}K}=90^0$, με συνέπεια $\mathrm{\Gamma\hat{B}\Theta}+\mathrm{B\hat{H}K}=90^0-\omega+90^0=18\hat{0}-\omega<180^0$, οπότε οι ευθείες ΒΘ και ΔΗ τέμνονται σε σημείο, έστω Κ. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Κ είναι συνευθειακά.

Παρατηρούμε τώρα ότι το τετράπλευρο ΕΔΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο, αφού $\mathrm{E\Delta}\parallel\mathrm{Z\Gamma}$ και $\mathrm{ZE}=\mathrm{AE}=\mathrm{\Gamma\Delta}$. Πράγματι, τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΓΕ έχουν τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ κοινή και $\mathrm{A\hat{E}Z}=\mathrm{A\hat{\Gamma}E}=\omega$, οπότε είναι ισογώνια. Άρα και το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές με $\mathrm{A\hat{Z}E}=\mathrm{E\hat{A}Z}$, οπότε: $\mathrm{AE}=\mathrm{ZE}$



Σχήμα 1

Από το ισοσκελές τραπέζιο ΕΔΓΖ έχουμε ότι:

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\Delta = 180^0 - \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 180^0 - \left(\frac{180^0 - \omega}{2}\right) = 90^0 + \frac{\omega}{2}\ . \qquad (2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΖ είναι

$$\mathrm{Z}\hat{\Delta}\mathrm{H} = 90^0 - \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H} = 90^0 - \omega. \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3) έπεται ότι το τετράπλευρο ΒΔΖΚ είναι εγγράψιμο.
Θεωρούμε το μέσο Λ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ και παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΕΔΛΓ έχει $\mathrm{E}\Delta \parallel \Gamma\Lambda,\ \Gamma\mathrm{E} = \Delta\mathrm{E} = \mathrm{A}\Gamma = \Gamma\Lambda$, αφού $\mathrm{A}\Gamma = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{AB}$ και Λ μέσον ΓΒ. Άρα το τετράπλευρο ΕΔΛΓ είναι ρόμβος. Επομένως έχουμε $\Lambda\hat{\Gamma}\Delta = \omega$ και επιπλέον $\Delta\Lambda = \Lambda\Gamma = \Lambda\mathrm{B} = \frac{\Gamma\mathrm{B}}{2}$, οπότε το τρίγωνο ΓΔΒ είναι ορθογώνιο στο Δ και από το ισοσκελές τρίγωνο ΛΔΒ έχουμε: $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Lambda = \frac{\omega}{2}$.
Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΔΖΚ έχουμε:

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{K}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Lambda = \frac{\omega}{2}, \qquad (4)$$

οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΖΚ και τη σχέση (4) έπεται ότι:

$$\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K} = \mathrm{H}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K} = 90^0 - \frac{\omega}{2} \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (2) και (5) έπεται ότι:

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma + \Gamma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K} = 90^0 + \frac{\omega}{2} + 90^0 - \frac{\omega}{2} = 180^0,$$

οπότε τα σημεία Α, Ε και Κ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3

Στον πίνακα είναι γραμμένοι σε μία ευθεία οι ακέραιοι από το 1 μέχρι και το 2030 σε αύξουσα σειρά. Έχουμε το δικαίωμα της «*κίνησης*» Κ:
Επιλέγουμε δύο οποιουσδήποτε αριθμούς α,β που είναι γραμμένοι σε διαδοχικές θέσεις και αντικαθιστούμε το ζευγάρι (α,β) με τον αριθμό $(\alpha-\beta)^{2020}$.

Εκτελούμε την κίνηση Κ αρκετές φορές μέχρι που να μείνει στον πίνακα μόνο ένας αριθμός. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να είναι ο αριθμός αυτός:
(α) ο 2020^{2020}, **(β)** ο 2021^{2020}.

Λύση

(α) Πρώτα από όλα παρατηρούμε τα εξής:
Σε οποιαδήποτε κίνηση Κ, οι αριθμοί $\alpha+\beta$ και $(\alpha-\beta)^{2020}$ είναι ισοϋπόλοιποι modulo 2, δηλαδή είναι και δύο άρτιοι ή είναι και οι δύο περιττοί. Επομένως μετά την αντικατάσταση των α,β από τον αριθμό $(\alpha-\beta)^{2020}$ δεν μεταβάλλεται το άρτιο ή το περιττό του αθροίσματος των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα. Επειδή $S_{2030} = \frac{2030\cdot 2031}{2} = 1015\cdot 2031$ περιττός, έπεται ότι μετά την τελευταία κίνηση ο μοναδικός

αριθμός που θα απομείνει θα πρέπει να είναι περιττός, οπότε η απάντηση στο ερώτημα (α) είναι αρνητική.

(β) Έστω ότι οι δύο τελευταίοι αριθμοί που έχουν μείνει είναι οι x, y. Τότε η μόνη περίπτωση να μην είναι κάποιος από αυτούς δύναμη του 2020 είναι να μην έχει λάβει μέρος ως τώρα στη διαδικασία. Αυτό μπορεί να έχει συμβεί μόνο με τους αριθμούς στην άκρη, δηλαδή τον 1 και τον 2030. Επειδή ο 1 είναι 1^{2020}, αρκεί να ελέγξουμε για τον 2030. Δηλαδή αν $x = a^{2020}$ και $y = 2030$, τότε πρέπει $(a^{2020} - 2030)^{2020} = 2021^{2020}$. Για $a = 1$ δεν έχει λύση, οπότε για $a \geq 2$ παίρνουμε $a^{2020} = 4051$, αδύνατο.

Σε κάθε άλλη περίπτωση, από τη διαδικασία θα έχουμε ότι $x = (a_1 - b_1)^{2020} = m^{2020}$ για κάποιο m και $y = (a_2 - b_2)^{2020} = n^{2020}$. Κάνοντας την τελευταία πράξη, στον πίνακα προκύπτει ο αριθμός $(m^{2020} - n^{2020})^{2020}$.

Θέλουμε τώρα να δούμε αν μπορεί να ισχύει: $(m^{2020} - n^{2020})^{2020} = 2021^{2020}$.

Αν $m = n$, δεν ισχύει. Θεωρούμε χωρίς βλάβη ότι $m > n$. Τότε θέλουμε να δούμε αν μπορεί να ισχύει

$$m^{2020} - n^{2020} = 2021. \qquad (1)$$

Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το $m^{2020} - n^{2020}$ είναι η τιμή 1, για $m = 1, n = 0$. Από την (1) έχουμε ότι $m > n$, οπότε $m \geq n + 1$. Επομένως $m^{2020} - n^{2020} \geq (n+1)^{2020} - n^{2020}$. Αναπτύσσοντας την τελευταία βλέπουμε ότι όλες οι δυνάμεις του n έχουν θετικό συντελεστή, οπότε είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως

$$m^{2020} - n^{2020} \geq (n+1)^{2020} - n^{2020} \geq 2^{2020} - 1 > 2^{11} - 1 = 2047$$

οπότε δεν μπορεί ποτέ να ισούται με 2021.

Σημείωση: Για να δείξουμε ότι η (1) δεν έχει λύση, μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής: Για $k = m^{505}, \lambda = n^{505}$ η (1) γίνεται: $k^4 - \lambda^4 = 2021 = 43 \cdot 47 \Leftrightarrow (k - \lambda)(k + \lambda)(k^2 + \lambda^2) = 43 \cdot 47$, οπότε $k^2 + \lambda^2 = 47$, που δεν έχει λύσεις.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλες τις τιμές του θετικού ακεραίου κ που ικανοποιούν την ιδιότητα:
Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α, β ώστε η παράσταση

$$\mathrm{A}(\kappa, \alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \kappa^2\beta^2 - \kappa^2\alpha\beta}$$

να είναι ένας σύνθετος θετικός ακέραιος.

Λύση

Σταθεροποιούμε $\kappa > 1$. Η ιδέα για τη λύση της άσκησης είναι να βρούμε α, β συναρτήσει του κ ώστε ο παρονομαστής να ισούται με 1.

Με άλλα λόγια ζητάμε πολυώνυμα $\alpha = P(\kappa),\ \beta = Q(\kappa)$ τέτοια ώστε

$$P(\kappa)^2 + \kappa^2 Q(\kappa)^2 - \kappa^2 P(\kappa) Q(\kappa) = 1.$$

$$P(\kappa)^2 = \kappa^2 Q(\kappa)\big(P(\kappa) - Q(\kappa)\big) + 1 \qquad (1)$$

Αν τα πολυώνυμα έχουν βαθμούς $m = \deg P(\kappa), n = \deg)Q(\kappa)$ με $m > n \geq 0$, τότε από τη σχέση (1) πρέπει

$$2m = 2 + m + n \Leftrightarrow m = n + 2.$$

Θα ασχοληθούμε με την πιο απλή περίπτωση αναζητώντας, αν υπάρχουν, πολυώνυμα βαθμού 2 και 0 , αντίστοιχα, που ικανοποιούν τη σχέση (1).

Με κατάλληλες αντικαταστάσεις βρίσκουμε ότι τα $P(\kappa) = \kappa^2 - 1, Q(\kappa) = 1$ ικανοποιούν τη σχέση (1). Επιλέγουμε λοιπόν $\alpha = \kappa^2 - 1, \beta = 1$ και τότε η παράσταση ισούται με $\frac{\kappa^2 - 1 + 1}{1} = \kappa^2$, που είναι σύνθετος για κάθε $\kappa > 1$. Επομένως όλες οι τιμές του $\kappa > 1$, δεν ικανοποιούν το πρόβλημα μας.

Για $\kappa = 1$ θα αποδείξουμε ότι ισχύει: $0 < \mathrm{A}(\alpha, \beta, \kappa) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta} \leq 2$, οπότε ο ρητός αριθμός $\mathrm{A}(\alpha, \beta, 1)$ δεν μπορεί να είναι σύνθετος θετικός ακέραιος για οποιεσδήποτε τιμές των α, β. Πράγματι, έχουμε

$$\alpha + \beta > 0 \text{ και } \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3\beta^2}{4} > 0, \text{ και}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta} \leq 2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta \geq \alpha + \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 - \alpha + \beta^2 - \beta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + \alpha(\alpha - 1) + \beta(\beta - 1) \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$