ΑΡΝΟΣ

Γεωμετρία Αρχιμήδη Μικρών

1995-1996

2. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Δ, Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των ΒΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΕΔ και ΕΖ αντοίστοιχα. Αν Ι είναι η τομή των ΒΕ, ΑΓ και Κ η τομή των ΗΘ, ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) $AK=3\Gamma K$

β) $HK=3H\Theta$

γ) $BE=3EI$

δ) $(E\Theta H)=\frac{1}{32}(AB\Gamma)$ (Το εμβαδόν του τριγώνου ΕΘΗ είναι το ένα τριακοστό δεύτερο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ)

1996-1997

1. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Δ. Οι μεσοκάθετοι των ΒΔ και ΓΔ τέμνουν τη ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να δειχτεί ότι ΒΕ=ΕΖ=ΖΓ.

β) Να βρεθεί τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ είναι το εμβαδό του τριγώνου ΒΔΕ.

1997-1998

4. Θεωρούμε κύκλο (Ο,ρ) και ευθεία (ε) που εφάπτεται στον (Ο,ρ) στο σημείο Α. Μία ευθεία παράλληλη στην ΟΑ τέμνει τον (Ο,ρ) στα σημεία Β , Γ και την (ε) στο Δ (το Γ βρίσκεται ανάμεσα στα Β, Δ) και Ε το αντιδιαμετρικό του Γ ως προς το Ο. Φέρνουμε την ΕΑ που τέμνει την ΒΔ στο Ζ.

α) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι 2ΑΔ=ΕΒ.

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ=ΚΟ , όπου Κ το μέσον της ΓΖ.

δ) Αν είναι ρ=2,5 και (ΑΔ)=1,5 να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΖ.

1998-1999

3. Έστω ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο και σημεία Δ επί της πλευράς ΑΒ, Ε επί της ΑΓ, $Δ_1$ και $Ε_1$ επί της ΒΓ ώστε $ΔΒ+ΒΔ_1=ΑΒ$, και $ΑΓ=ΓΕ+ΓΕ_1$. Να προσδιοριστεί η μικρότερη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $ΔΕ_1$ και $ΕΔ_1$.

1999-2000

1. Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία στο επίπεδο. Βρείτε ευθεία του επιπέδου από την οποία τα τρία σημεία να απέχουν ίσες αποστάσεις. Πόσες τέτοιες ευθείες του επιπέδου υπάρχουν;

2000-2001.

4. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε το ύψος ΑΔ και τις διχοτόμους ΑΕ, ΒΖ που τέμνονται στο Ι. Από το Ι φέρουμε την ΙΘ κάθετη προς την ΑΓ. Επιπλέον φέρουμε την ευθεία x'Ax κάθετη στην ΑΓ. Η προέκταση της ΕΘ τέμνει την x'Ax στο Κ.

Να αποδείξετε ότι ΑΚ=ΑΔ.

2001-2002

1. Προς το εξωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $Γ\hat{Α}Δ=90°$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενα τέμνονται στο σημείο Ε.

α) Να υπολογίσετε τη $Δ\hat{Β}Γ$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ συναρτήσει της πλευράς α.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΒΔ συναρτήσει του α.

ΑΡΝΟΣ

2002-2003

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Το ύψος του ΑΗ και η μεσοκάθετος ε της πλευράς ΑΒ τέμνονται στο σημείο Μ. Η κάθετη προς την ευθεία ε στο σημείο Μ τέμνει την ΒΓ στο σημείο Δ. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΜΔ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Σ , να αποδείξετε ότι:

α) ΒΣ//ΑΜ.

β) το τετράπλευρο ΑΜΒΣ είνα ρόμβος.

2003-2004

2. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Θεωρούμε τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΒΓ και ΑΔ, αντίστοιχα. Η κάθετη από το Β προς την ΑΚ τέμνει την ΑΚ στο Ε και την ΓΛ στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΖΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να αποδείξετε ότι 2(ΑΒΚΖ) = (ΑΒΓΔ)

γ) Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς α, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΚΖΛ ως συνάρτηση της πλευράς ΒΓ= α.

2004-2005

1. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ, ΑΒ=α, ΓΔ=2α και ΔΒ⊥ΒΓ. Έστω Μ το μέσον της ΓΔ, Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου ΑΒΜΔ, Κ το σημείο τομής των ευθειών ΔΑ, ΓΒ και Λ το σημείο τομής των ευθειών ΚΟ και ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΜΔ είναι ρόμβος

β) το τρίγωνο ΓΔΚ είναι ισοσκελές

γ) η ευθεία ΔΛ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΚΒ στο μέσον του.

2005-2006

1. Έστω Ρ εσωτερικό σημείο ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών ΡΑ , ΡΒ και ΡΓ.

2006-2007

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Έστω Ι το σημείο τομής των διχοτόμων του. Η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο C του τριγώνου ΒΙΓ στο σημείο Ν με Ν≠Ι.

Να προσδιορίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου ΒΓΝ συναρτήσει των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ

β) το κέντρο του κύκλου C.

2007-2008

4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΔ = α, ΑΒ = 2α, ΒΓ = 3α και $\hat{A} = \hat{B} = 90°$. Έστω Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Φέρουμε τη ΖΙ κάθετη προς τη βάση ΒΓ (το σημείο Ι πάνω στη ΒΓ). Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

β) Το μέσο Ο της ΕΖ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ.

γ) Οι ευθείες ΑΖ και ΔΙ τέμνονται επί της ευθείας ΒΟ.

2008-2009

2. Από την κορυφή Α ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ημιευθεία Αx που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ. Πάνω στην Αx παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΒΑ = ΒΕ.

Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{E}\Gamma$.

2009-2010

2. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ = α και ΒΓ = β. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το μέρος του Α κατά τμήμα ΑΕ = ΑΟ και την διαγώνιο ΔΒ προς το μέρος του Β κατά τμήμα ΒΖ = ΒΟ.

Αν το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\beta = \alpha\sqrt{3}$

β) ΑΖ = ΕΟ

γ) ΕΟ ⊥ ΖΔ.

2009-2010

4. Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 ενός επιπέδου έτσι ώστε η ευθεία ε_2 να έχει την ίδια απόσταση α από τις ε_1 και ε_3. Τοποθετούμε 5 σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 και M_5 πάνω στις ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3, έτσι ώστε σε κάθε ευθεία να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό ισοσκελών τριγώνων που είναι δυνατό να σχηματιστούν με κορυφές τρία από τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 και M_5 με κατάλληλη τοποθέτησή τους πάνω στις ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $M_1, M_2, M_3 \in \varepsilon_2$, $M_4 \in \varepsilon_1$ και $M_5 \in \varepsilon_3$.

(β) $M_1, M_2 \in \varepsilon_1$, $M_3, M_4 \in \varepsilon_3$ και $M_5 \in \varepsilon_2$.

2010-2011

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, με $B\hat{A}\Gamma = 120°$, στο οποίο η διάμεσος ΑΔ είναι κάθετη προς την πλευρά ΑΒ και τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο σημείο Ε. Οι ευθείες ΒΑ και ΕΓ τέμνονται στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $Z\Delta \perp BE$, (β) $Z\Delta = B\Gamma$.

2011-2012

1. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (C). Ο κύκλος $C_1(A, AB)$ τέμνει την ΒΓ στο Δ και τον κύκλο (C) στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Delta A E}$.

2012

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ (με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R). Ο κύκλος $c_1(A, AB)$ (με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ) τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι η πλευρά ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{A}E$.

2012

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Πάνω σε επίπεδο Π δίνεται ευθεία ε και πάνω στην ε δίνονται δύο σημεία A_1, A_2, διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε ακόμη και δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία A_3, A_4 του επιπέδου Π που δεν ανήκουν στην ευθεία ε. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, ώστε να σχηματίζεται ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία A_1, A_2, A_3, A_4;

(α) όταν τα σημεία A_3, A_4 ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε,

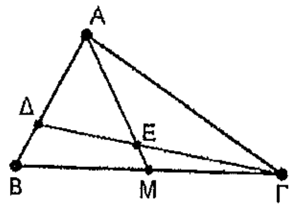
(β) όταν τα σημεία A_3, A_4 ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.

Να δώσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και σε κάθε περίπτωση να εξηγήσετε πως μπορούν να προσδιοριστούν γεωμετρικά τα σημεία A_3 και A_4.

2013

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $AB < A\Gamma$. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ τέμνει τη διάμεσο ΑΜ στο σημείο Ε, τότε ισχύει ότι $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma E$. *Μονάδες 5*



2014

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο BCDE, τέτοιο ώστε: $BE \parallel AM$ και $BE = \dfrac{AM}{2}$ Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD.

2015

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB \le A\Gamma$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O,R)$. Η κάθετη από την κορυφή Α προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ την τέμνει στο σημείο Δ.

(α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

(β) Αν ισχύει ότι $\Gamma\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

2016

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ // ΒΓ) με $\hat{A} = \hat{B} = 90^o$ και ΑΔ < ΒΓ. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΓΔ, Ζ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ και Μ το μέσον της ΕΖ. Αν δίνεται ότι η ευθεία ΓΜ είναι κάθετη στην ευθεία ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΓ είναι κάθετη στην ευθεία ΕΓ.

2017

Πρόβλημα 1

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Πάνω στην πλευρά ΑΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $ΔΕ = \frac{\alpha}{3}$ και $ΑΖ = \frac{\alpha}{4}$. Αν οι ευθείες ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Η, να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ ως συνάρτηση του α.

2018

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο c με κέντρο O και ακτίνα R. Ονομάζουμε Δ το αντιδιαμετρικό της κορυφής Α. Δίνεται επίσης ο κύκλος c_1 του οποίου το κέντρο Κ βρίσκεται επάνω στο τμήμα ΒΔ και περνάει από τα σημεία Β και Γ. Αν ο κύκλος c_1 τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΚΕ, έστω c_2, εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου c.

2019

Πρόβλημα 2

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Η κάθετη στο μέσον Ε της πλευράς ΒΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ σε σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΕΖ τέμνει την πλευρά ΑΒ για δεύτερη φορά στο σημείο Η και την ευθεία ΓΔ σε σημείο Θ διαφορετικό του Δ. Η ευθεία ΕΘ τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Κ και την ευθεία ΓΗ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Η, Λ, Κ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

2020

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Έστω Δ το μέσον της πλευράς ΒΓ και ΒΕ, ΓΖ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ. Η ευθεία ΖΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Θ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΖΔΕ συναρτήσει της γωνίας $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να βρείτε τη γωνία $Β\hat{Θ}Ζ$ συναρτήσει των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

2021 η προκριματικός

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΒΓ<ΑΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (c). Ο κύκλος c(Α,ΑΒ) με (κέντρο Α και ακτίνα ΑΒ) τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Δ και τον κύκλο (c) στο σημείο Η. Ο κύκλος c(Α,ΑΓ) με (κέντρο Α και ακτίνα ΑΓ) τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ και τον κύκλο (c) στο σημείο Ε. Οι ευθείες ΖΗ και ΕΔ τέμνονται (τέλος) στο σημείο Θ. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΘΔΖ και ΘΕΗ είναι ίσοι μεταξύ τους.

2022

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του, τέτοιο ώστε

$$Δ\hat{Β}Γ = 30^0,\ Δ\hat{Β}Α = 50^0,\ Δ\hat{Γ}Β = 55^0.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\hat{Β} = \hat{Γ} = 80^0$

(β) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $Δ\hat{Α}Γ$.

2023

Πρόβλημα 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, αντίστοιχα. Θεωρούμε δύο σημεία Δ και Ε πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ, έτσι ώστε $ΓΔ \parallel ΜΕ$ και $ΒΔ < ΒΕ$. Να αποδείξετε ότι: $ΒΔ = 2 \cdot ΕΝ$.

2024

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του $ω$. Με κέντρο το σημείο Α γράφουμε κύκλο $γ$ που τέμνει το τόξο ΑΒ του κύκλου $ω$, που δεν περιέχει το Γ, στο σημείο Δ και το τόξο ΑΓ, που δεν περιέχει το Β, στο σημείο Ε. Υποθέτουμε ότι το σημείο τομής Κ των ευθειών ΒΕ και ΓΔ ανήκει στον κύκλο $γ$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.