ΑΡΝΟΣ

Θεωρία Αριθμών
Αρχιμήδη Μικρών

1994-1995

2. Θεωρούμε 6 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Έστω α το άθροισμα των τριών πρώτων και β το άθροισμα των τριών άλλων. Είναι δυνατόν να ισχύει α·β = 19951995;

1995-1996

4. α) Αν το κλάσμα $\frac{\alpha\cdot\nu+\beta}{\gamma\cdot\nu+\delta}$ απλοποιείται με το 2, να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma$ είναι άρτιος. (Τα α, β, γ, δ, ν είναι φυσικοί αριθμοί και ο γν+δ διαφορετικός από το μηδέν.)
β) Να εξετάσετε αν υπάρχει πρώτος αριθμός p και φυσικός αριθμός n ώστε να ισχύει $n^2+n+p=1996$.

1996-1997

2. Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί ν ώστε η $A=\nu^4+4\nu^3+5\nu^2+6\nu$ να είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

3. Να εξετάσετε αν μπορούμε να ξαναγράψουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 σε μια σειρά ώστε:

α) Το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών αριθμών στη νέα σειρά να μην υπερβαίνει το 16.

β) Το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών αριθμών στη νέα σειρά να μην υπερβαίνει το 15.

4. Δίνονται 10 ομόκεντροι κύκλοι και 10 ακτίνες τους.

Στα σημεία που οι ακτίνες τέμνουν τον εσωτερικό κύκλο γράφουμε διαδοχικά και με τη φορά των δεικτών του ρολογιού τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Στον επόμενο κύκλο γράφουμε με την ίδια διαδικασία τους αριθμούς 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Συνεχίζουμε μέχρι το δέκατο κύκλο που γράφουμε τους αριθμούς 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100. Με τη διάταξη αυτή οι αριθμοί 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91 βρίσκονται στην ίδια ακτίνα και ομοίως και για τις άλλες ακτίνες.

Σε 50 από τους 100 αριθμούς που διαθέτουμε βάζουμε το πρόσημο "πλην" φροντίζοντας ώστε:

α) σε κάθε ακτίνα να υπάρχουν ακριβώς 5 "πλην" και

β) σε κάθε έναν από τους κύκλους να υπάρχουν ακριβώς 5 "πλην".

Να δειχτεί ότι το άθροισμα των 100 αριθμών που προκύπτουν είναι μηδέν.

1997-1998

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους θετικούς αριθμούς x , y , z , t , w για τους οποίους ισχύει:

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z+\cfrac{1}{t+\cfrac{1}{w}}}}=\frac{1998}{115}$$

3. Έστω ν πρώτος με $\nu\neq 2$ και $\nu\neq 5$. Να αποδείξετε ότι μεταξύ των ν πρώτων όρων της ακολουθίας

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots1}_{\nu\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma}$$

υπάρχει ένας που διαιρείται με τον ν.

1998-1999

2. Έστω ν σταθερός θετικός ακέραιος αριθμός και έστω χ , ψ θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε χψ = νχ + νψ. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του χ συναρτήσει του ν.

4. Ως εναλλακτικό άθροισμα ενός συνόλου $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_\kappa\}$ πραγματικών αριθμών με $a_1 < a_2 < \ldots < a_\kappa$, ορίζουμε τον αριθμό $\Sigma_A = a_\kappa - a_{\kappa-1} + a_{\kappa-2} - \ldots + (-1)^{\kappa-1}\cdot a_1$

(π.χ. αν $A=\{1, 2, 5, 7\}$, τότε $\Sigma_A = 7-5+2-1=3$)

Θεωρούμε τα εναλλακτικά αθροίσματα όλων των υποσυνόλων του συνόλου A= {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} τα οποία και αθροίζουμε. Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του τελικού αθροίσματος;

1999-2000

2. Για τον τριψήφιο αριθμό $\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$ γνωρίζουμε ότι:

α) το ψηφίο των εκατοντάδων ισούται με το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων και των μονάδων

β) β(γ+1)=52-4α

Να βρεθεί ο αριθμός.

2000-2001

2. Οι αριθμοί μ, ν είναι ακέραιοι.

α) Να βρεθούν τα ζεύγη (μ , ν) που επαληθεύουν την εξίσωση $\mu^3 - 4\mu\nu^2 = 8\nu^3 - 2\mu^2\nu$.

β) Από τα ζεύγη που θα βρείτε να προσδιορίσετε εκείνα που ικανοποιούν την εξίσωση $\mu + \nu^2 = 3$.

3. Έχουμε να ζυγίσουμε 8 σώματα διαφορετικού βάρους με μία ζυγαριά χωρίς σταθμά, δηλαδή με αυτήν μπορούμε μόνο να συγκρίνουμε τα βάρη δύο σωμάτων.

α) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ζυγίσεων που πρέπει να κάνουμε για να προσδιορίσουμε το βαρύτερο σώμα;

β) Πόσες επιπλέον ζυγίσεις θα χρειαστούμε για να προσδιορίσουμε το δεύτερο σε βάρος σώμα;

2001-2002

2. Στον διαγωνισμό ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ της Ε.Μ.Ε. συμμετέχουν αγόρια και κορίτσια που χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στους "μικρούς" και τους "μεγάλους". Τα αγόρια που λαμβάνουν μέρος στον φετινό ΑΡΧΙΜΗΔΗ αποτελούν το 55% αυτών που συμμετέχουν. Ο λόγος του πλήθους των "μικρών" αγοριών προς το πλήθος των "μεγάλων" αγοριών ισούται με το λόγο του πλήθους των "μικρών" προς το πλήθος των "μεγάλων".

Να βρεθεί ο λόγος του πλήθους των "μικρών" αγοριών προς το πλήθος των "μικρών κοριτσιών".

3. Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς α , β, γ με $\alpha \le \beta \le \gamma$ για τους οποίους ισχύει ότι : $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - \alpha\beta\gamma = 2$.

2002-2003

1. Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακεραίου ν για τις οποίες ο αριθμός $A = \nu^3 - \nu^2 + \nu - 1$ είναι πρώτος.

2. Να προσδιορίσετε τετραψήφιο αριθμό $\overline{xyzw}$, ο οποίος έχει την ιδιότητα : Αν του προσθέσουμε το άθροισμα των ψηφίων του, προκύπτει ο αριθμός 2003.

4. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους οι οποίοι μπορούν να παρασταθούν ως κλάσματα της μορφής $\frac{\mu\nu+1}{\mu+\nu}$, όπου μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι.

2003-2004

1. Οι αριθμοί 203 και 298 διαιρούμενοι με το θετικό αριθμό x δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 13. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x;

4. Να προσδιορίσετε τον ρητό αριθμό $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β θετικοί ακέραιοι, με τον ελάχιστο παρονομαστή, που είναι τέτοιος ώστε $\frac{52}{303}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{16}{91}$.

2005-2006

2. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x,y) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$2x^y - y = 2005$$

3. Να αποδειχθεί ότι, μεταξύ 27 οποιωνδήποτε διαφορετικών θετικών ακεραίων μικρότερων του 100, υπάρχουν πάντοτε δύο που δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους.

2006-2007

2. Αν ο αριθμός 4ν+3, όπου ν ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 11, να βρείτε :

α) τη μορφή του αριθμού ν

β) το υπόλοιπο της διαίρεσης του ν^4 με το 11.

3. Έστω $A=\sqrt{\kappa^2+24}$ και $B=\sqrt{\kappa^2-9}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου αριθμού κ που είναι τέτοιες ώστε η διαφορά Α-Β να είναι ακέραιος αριθμός.

4. Καθένας από τους 50 μαθητές μιας τάξης έστειλε τα Χριστούγεννα κάρτες σε 25 ακριβώς συμμαθητές του. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τους 50 μαθητές της τάξης πήραν ο ένας την κάρτα του άλλου.

2007-2008

1. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς διαιρέτες των αριθμών:

α) $A=p^{\kappa}$, όπου p πρώτος θετικός ακέραιος και κ θετικός ακέραιος

β) $B=p^{\kappa}\cdot q^{\lambda}$, όπου p , q πρώτοι θετικοί ακέραιοι διαφορετικοί μεταξύ τους και κ, λ θετικοί ακέραιοι

γ) Γ=1944

3. Να βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του θετικού ακεραίου x για την οποία ο αριθμός $A = 2^{182} + 4^{x} + 8^{700}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

2008-2009

1. Αν ο αριθμός

$$K=\frac{9n^2+31}{n^2+7}$$

είναι ακέραιος, να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου n.

2009-2010

1. Να προσδιορίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνατόν να γραφούν στη μορφή 80κ + 3λ, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$.

2010-2011

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε το σύνολο των τετραψήφιων θετικών ακέραιων αριθμών $x=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς $y=\overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ και υποθέτουμε $x>y$. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς $x-y$, καθώς και τους αντίστοιχους τετραψήφιους ακέραιους x, y για τους οποίους λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν ο αριθμός $3\nu+1$, όπου ν ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 7, να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης:

(α) του ν με το 7,

(β) του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m, $m>1$.

2011-2012

3. Οι θετικοί ακέραιοι μ, ν με μ > ν ικανοποιούν τη σχέση ΕΚΠ(μ,ν) + ΜΚΔ(μ,ν) = μ + ν.

α) Να δείξετε ότι ο ν διαιρεί τον μ.

β) Αν επιπλέον ισχύει μ - ν = 10, να βρείτε όλα τα ζεύγη (μ,ν).

2013

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω $A = \overline{abcd} = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$ τετραψήφιος θετικός ακέραιος με ψηφία τέτοια ώστε να ισχύουν: $a \geq 7$ και $a > b > c > d > 0$. Θεωρούμε και τον θετικό ακέραιο $B = \overline{dcba} = d\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a$, που προκύπτει από τον Α με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του. Αν δίνεται ότι ο αριθμός $A + B$ έχει όλα τα ψηφία του περιττά, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού Α.

Μονάδες 5

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρείτε όλες τις τριάδες (x, y, z) θετικών ακέραιων αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = 1.$$

Μονάδες 5

2014

Πρόβλημα 2

Έστω p πρώτος και m θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (p, m) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m) + p = (m+1)^3.$$

2015

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη μη αρνητικών ακέραιων (m, n) με $m \geq n$, που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $A = (m+n)^3$ να διαιρεί τον αριθμό $B = 2n(3m^2 + n^2) + 8$.

Πρόβλημα 3.

Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κατάλληλα στο επίπεδο 2014 σημεία, έτσι ώστε με κορυφές από αυτά τα σημεία να κατασκευάσουμε 1006^2 παραλληλόγραμμα εμβαδού 1;

2017

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους a, b, p, όπου p πρώτος, που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

2018

Πρόβλημα 3
Θεωρούμε τους θετικούς ακεραίους a, b τέτοιους ώστε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2 + 4a}{ab}$$

να είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο b είναι περιττός, τότε ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

2019

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους οι οποίοι είναι ίσοι με 13 φορές το άθροισμα των ψηφίων τους.

2020

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες υπάρχουν τριάδες θετικών ακέραιων (α, β, γ) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\alpha + \beta + \gamma = \nu\alpha\beta\gamma. \qquad \text{(E)}$$

Για τις τιμές του ν που θα βρείτε, να προσδιορίσετε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (Ε).

2021

Πρόβλημα 3

Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n για τον οποίο ο αριθμός $8^n + 47$ είναι πρώτος.

ΑΡΝΟΣ

2022

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη μη μηδενικών ακεραίων (x, y) που είναι τέτοιοι, ώστε ο ακέραιος $x^2 + y^2$ να είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων $x^5 + y$ και $y^5 + x$.

2023

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, με $\alpha > 1$, που είναι τέτοιοι ώστε ο β είναι διαιρέτης του $\alpha - 1$ και ο $2\alpha + 1$ είναι διαιρέτης του $5\beta - 3$.

2024

Πρόβλημα 4

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες τριάδες θετικών ακέραιων αριθμών (x, y, z) τέτοιες ώστε

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 6xyz.$$