

**Λύσεις Θεμάτων ΘΑΛΗ 2024**  
**A Λυκείου**  
**(Διαφορετικές από τις επίσημες)**

**Πρόβλημα 2 Α- Λυκείου.**

Δίνεται ότι  $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) + 4(x + y - 1) = 0$  και ζητείται να βρούμε τα  $x, y$

Αν κρατήσουμε το ένα σταθερό, τότε είναι τριώνυμο ως προς το άλλο.

Η σχέση γράφεται

$$(y^2 + 1)x^2 + 4xy + y^2 + 1 = 0$$

Είναι τριώνυμο ως προς το  $x$ .

Η διακρίνουσα του πρέπει να είναι μη αρνητική.

Είναι

$$\Delta = (4y)^2 - 4(y^2 + 1)^2 = 16y^2 - 4(y^4 + 2y^2 + 1) = -4y^4 + 8y^2 - 4 = -4(y^4 - 2y^2 + 1) = -4(y^2 - 1)^2$$

Αφού η διακρίνουσα του είναι μη αρνητική πρέπει

$$(y^2 - 1)^2 = 0 \text{ που δίνει } y = 1 \text{ ή } y = -1.$$

Για  $y = 1$  παίρνουμε  $2x^2 + 4x + 2 = 0$  που δίνει  $x = -1$

Για  $y = -1$  παίρνουμε  $2x^2 - 4x + 2 = 0$  που δίνει  $x = 1$ .

Τελικά είναι  $(x, y) = (1, -1)$  ή  $(x, y) = (-1, 1)$

**Πρόβλημα 3 Α- Λυκείου.**

α) Έχουμε ότι  $\frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} = \alpha$ ,  $\alpha \neq 0$ .

Η σχέση γράφεται  $\beta^2 + \beta + 1 = \frac{\beta}{\alpha}$  ή  $\beta^2 + 1 = \frac{\beta}{\alpha} - \beta = \beta \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right)$ .

**Έξυπνα και Εύκολα!**

Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\beta^4 + 2\beta^2 + 1 = \beta^2 \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2.$$

$$\text{Άρα είναι } \beta^4 + \beta^2 + 1 = \beta^2 \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 - \beta^2 = \beta^2 \left( \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 - 1 \right).$$

$$\text{Τελικά είναι } \frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \frac{1}{\left( \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 - 1 \right)}$$

$$\beta) \text{Θέλουμε να λύσουμε ως προς } \alpha \text{ την εξίσωση } \frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \alpha.$$

Λόγω του ( $\alpha$ ) ερωτήματος αρκεί να βρούμε το  $\alpha \neq 0$  ώστε

$$\alpha = \frac{1}{\left( \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 - 1 \right)} \quad (1).$$

$$\text{Αλλά είναι } \left( \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 - 1 \right) = \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2} - 1 = \frac{(1-\alpha)^2 - \alpha^2}{\alpha^2} = \frac{1-2\alpha}{\alpha^2}.$$

$$\text{Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε ότι } \alpha = \frac{\alpha^2}{1-2\alpha}.$$

$$\text{Επειδή είναι } \alpha \neq 0 \text{ γίνεται } 1-2\alpha = \alpha \text{ που δίνει } \alpha = \frac{1}{3}$$