

ΘΕΜΑΤΑ ΦΙΙ - ΟΜΑΔΑ Α

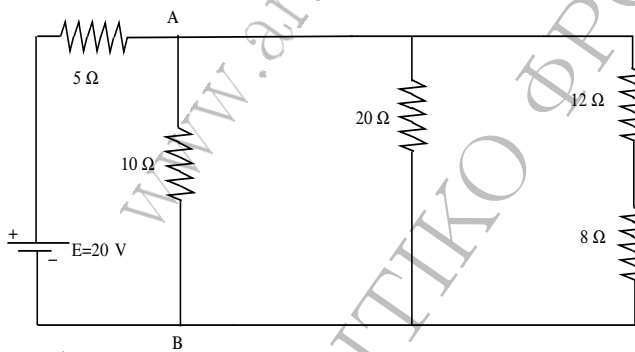
ΕΛΜΕΠΑ-Σχολή: Μηχανικών-Τμήμα: Μηχανολόγων Μηχανικών

Ιούνης 2023

Επιμέλεια : Β. Καράβολας

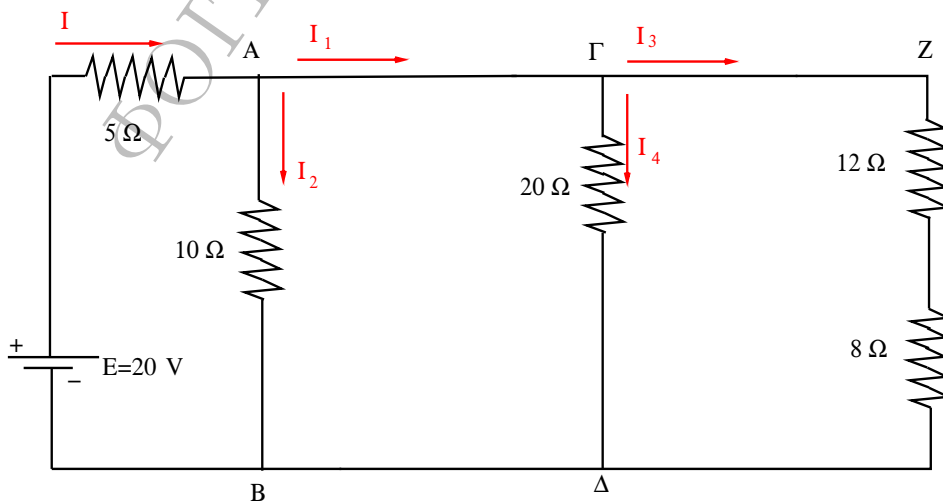
Θέμα 1ο

1. Βρείτε την ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος (μον.0.5)
2. Ποια η ισχύς που αποδίδει η πηγή στο εξωτερικό κύκλωμα; (μον.0.5)
3. Ποια η τάση στα άκρα του αντιστάτη των 10Ω (μον.0.5);
4. Ποια η ισχύς που καταναλώνεται στον αντιστάτη των 8Ω (μον.0.5);



ΛΥΣΗ :

1. Το κύκλωμα του σχήματος είναι:

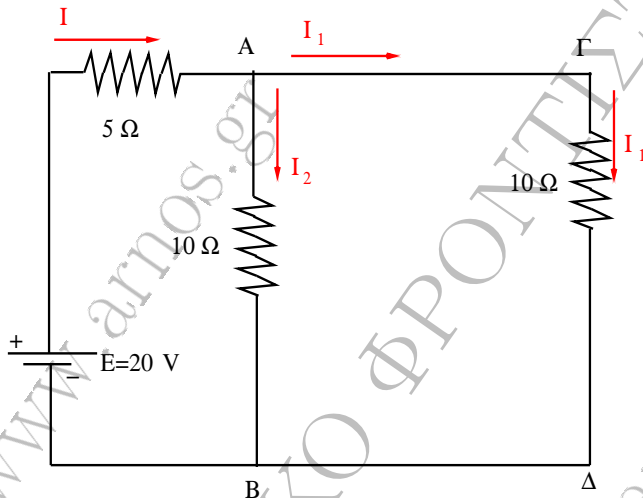


Από την πηγή πηγάζει ρεύμα I το οποίο διακλαδίζεται στους δύο κόμβους (Α,Γ) στα I_1 και I_2 και I_3 και I_4 . Παρατηρούμε ότι από τις αντιστάσεις στον κλάδο ΓΖΔ ότι διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα επομένως είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Επομένως:

$$R_s = 12 + 8 = 20 \Omega$$

Οι δύο κλάδοι (ΓΔ) και (ΓΖΔ) έχουν κοινά άκρα, επομένως έχουν και την ίδια τάση στα άκρα τους, συνεπώς είναι συνδεδεμένοι σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{p1}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} \Leftrightarrow R_{p1} = 20 \Omega$$

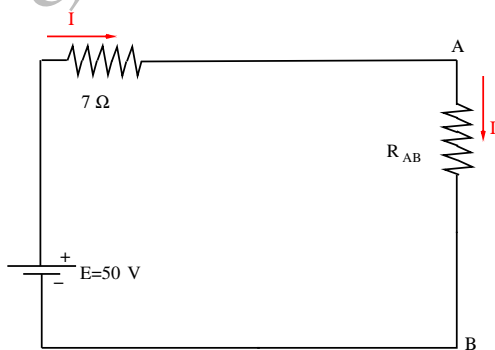


Οι δύο κλάδοι (ΑΒ) και (ΑΓΔΒ) έχουν κοινά άκρα, επομένως έχουν και την ίδια τάση στα άκρα τους, συνεπώς είναι συνδεδεμένοι σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \quad (1)$$

$$R_{AB} = 5 \Omega$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :Θα μπορούσαμε να πάρουμε απευθείας και τους τρεις κλάδους (ΑΒ, ΓΔ, ΓΖΔ) συνδεδεμένους παράλληλα.



Παρατηρούμε ότι από τις αντιστάσεις $R_1 = 7 \Omega$ και R_{AB} περνά το ίδιο ρεύμα επομένως είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Επομένως:

$$\begin{cases} R_t = R_1 + R_{AB} \\ R_1 = 5 \Omega \\ R_{AB} = 5 \Omega \end{cases} \iff R_t = 10 \Omega$$

2. Το ρεύμα που διαρρέει την πηγή είναι:

$$\begin{cases} E = IR_t \\ E = 20 V \\ R_t = 10 \Omega \end{cases} \iff I = 2 A$$

Η ισχύς της πηγής είναι:

$$\begin{cases} P = EI \\ E = 20 V \\ I = 5 A \end{cases} \iff P = 100 W$$

3. Η τάση V ανάμεσα στα A, B είναι:

$$\begin{cases} V = IR_{AB} \\ I = 2 A \\ R_{AB} = 5 \Omega \end{cases} \iff V = 10 V$$

4. Το ρεύμα I_3 θα είναι από το νόμο του Ohm:

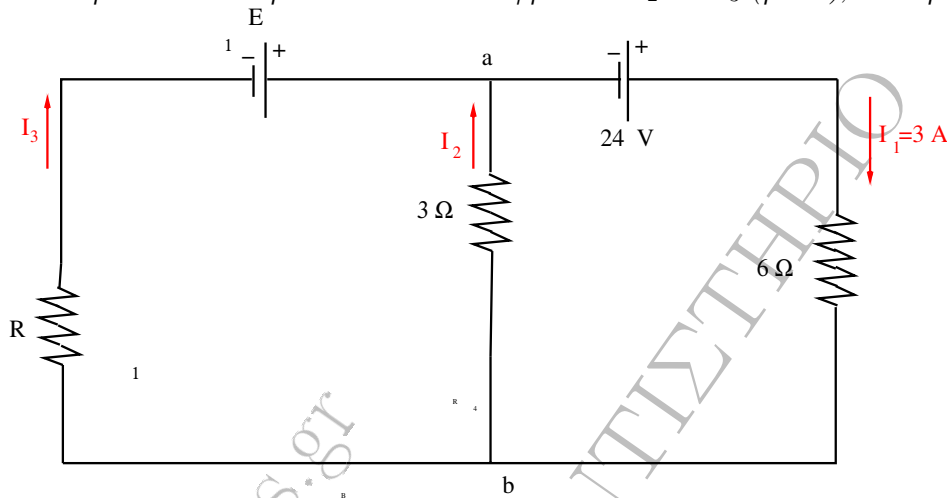
$$\begin{cases} I_3 = \frac{V}{R_s} \\ V = 10 V \\ R_s = 20 \Omega \end{cases} \iff I_3 = 0.5 A$$

Η ισχύς που διαρρέει τον αντιστάτη $R_4 = 8 \Omega$ θα είναι:

$$\begin{cases} P_4 = I_4^2 R_4 \\ I_4 = 0.5 A \\ R_4 = 8 \Omega \end{cases} \iff P_4 = 2 W$$

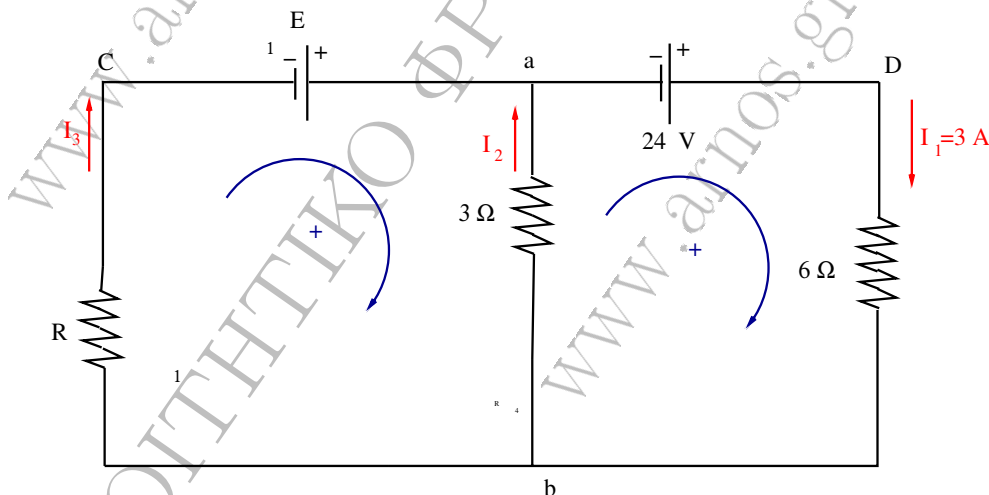
Θέμα 2ο

Στο παρακάτω κύκλωμα αν $E = 12\text{ V}$ να βρείτε τα I_2 και I_3 (μον.1), και την αντίσταση R . (μον. 0.5)



ΛΥΣΗ :

1. Το κύκλωμα του σχήματος είναι:



Παρατηρούμε ότι εδώ έχουμε δύο κόμβους (a, b , τα σημεία στα οποία διακλαδίζεται το ρεύμα), τρεις κλάδους (ab, aCb, aDb) και τρεις βρόχους ($aCba, aDba, aCbDa$). Έστω n ο αριθμός των κόμβων και l ο αριθμός των βρόχων.

Επιλέγουμε φορές διαγραφής αυτές του σχήματος και στη συνέχεια εφαρμόζουμε 1ο κανόνα του Kirchhof σε $n - 1$ κόμβους (εδώ $n = 2$) και σε $l - 1$ βρόχους (εδώ $l = 3$)

Οι κανόνες για τη σωστή αναγραφή των προσήμων σε ένα βρόχο στον οποίο γράφουμε τον 2ο κανόνα του Kirchhof είναι:

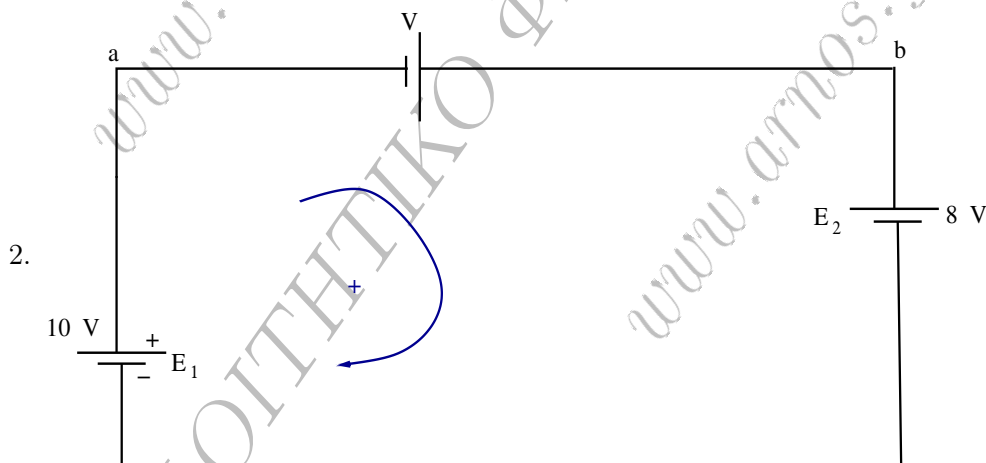
(α') Αν κατά τη διαγραφή του βρόχου συναντήσουμε πρώτα το πρόσημο (+) σε μια τάση αναφοράς,

έχουμε μείωση δυναμικού και γράφουμε την τάση με πρόσημο μείον. Αν συναντήσουμε πρώτα το πρόσημο (-) έχουμε αύξηση δυναμικού και γράφουμε την τάση με πρόσημο συν.

(β') Αν κατά τη διαγραφή του βρόχου συναντήσουμε ομόρροπο με τη φορά διαγραφής ρεύμα που διαρρέει μια αντίσταση τότε γράφουμε την πτώση τάσης με πρόσημο μείον. Αν συναντήσουμε αντίρροπο ρεύμα να διαρρέει την αντίσταση τότε την πτώση τάσης με πρόσημο συν

Οι εξισώσεις που παίρνουμε είναι:

$$\begin{bmatrix} a & I_1 = I_2 + I_3 \\ \alpha\Delta\beta\alpha & 24 - 6I_1 - 3I_2 = 0 \\ \alpha\beta\alpha & 12 + 3I_2 - I_3R = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 = I_2 + I_3 \\ 24 - 18 - 3I_2 = 0 \\ 12 + 3I_2 - RI_3 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_3 = 1 \text{ A} \\ I_2 = 2 \text{ A} \\ R = 18 \Omega \end{bmatrix}$$



Ξαναγράφουμε τον Β κανόνα του Kirchhoff για τον βρόχο $CbDaC$ έχοντας αντικαταστήσει τον κλάδο ab με μια πηγή τάσης V με ίδια πολικότητα με την E_1 .

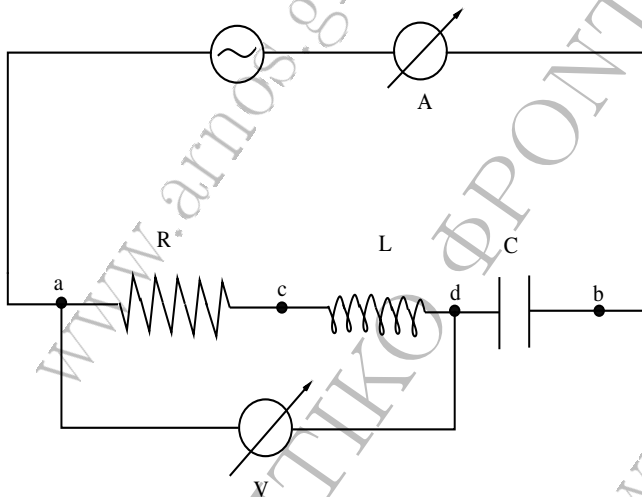
$$\begin{bmatrix} E_1 - E_2 + V = 0 \\ V = V_b - V_a \end{bmatrix} \Leftrightarrow 10 - 8 = V_a - V_b \Leftrightarrow V_a - V_b = 2 \text{ V}$$

Θέμα 3ο

Στα άκρα πηγής εναλλασσόμενης τάσης συνδέονται σε σειρά αντιστάτης $R = 100 \Omega$, πυκνωτής $C = 20 \mu F$ και

πηγίο $L = 0.9 \text{ H}$ και η στιγμιαία τιμή του ρεύματος που το διαρρέει είναι $i(t) = I \cos(100t)$. Το πλάτος τάσης στα άκρα της πηγής είναι 311 V .

1. Βρείτε την ένδειξη του αμπερομέτρου (μον.1)
2. Φτιάξτε διάγραμμα περιστρεφόμενων διανυσμάτων και πείτε τη συμπεριφορά εμφανίζει το κύκλωμα (επαγωγική ή χωρητική) εξηγώντας το (μον. 0.5)
3. Βρείτε ποια τάση θα μετρήσει το βολτόμετρο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (μον. 1);
4. Γράψτε τη σχέση που δίνει τη στιγμιαία τιμή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή $v_C(t)$ (μον.0.5)
5. Ποιος ο ρυθμός με τον οποίο η πηγή προσφέρει ενέργεια στο κύκλωμα στο συντονισμό; (μον (0.5)



ΛΥΣΗ :

Από τη στιγμιαία ένταση του ρεύματος βρίσκουμε την κυκλική συχνότητα της πηγής:

$$\begin{cases} i(t) = I \cos(100t) \\ i(t) = I \cos(\omega t) \end{cases} \iff \omega = 100 \text{ r/s}$$

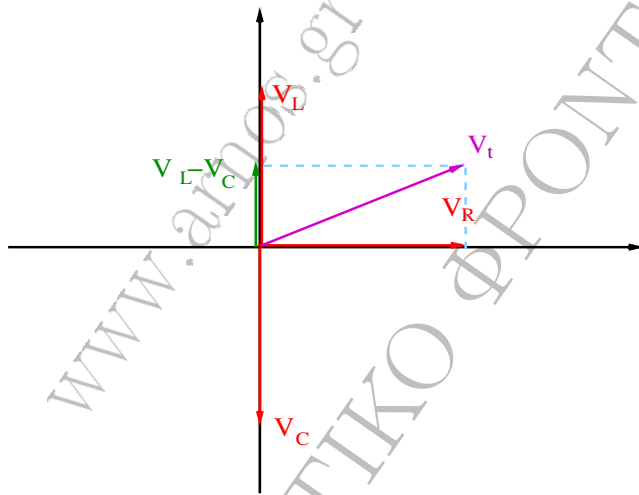
1. Το αμπερόμετρο μετρά ενεργές τιμές έντασης ρεύματος. Η συνολική εμπέδηση του κυκλώματος είναι:

$$\begin{cases} Z = \sqrt{(Z_L - Z_C)^2 + R^2} \\ Z_L = L\omega \\ Z_C = \frac{1}{C\omega} \end{cases} \iff Z = \sqrt{100^2 + \left(0.9 \cdot 100 - \frac{1}{20 \times 10^{-6} \cdot 100}\right)^2} = 422 \Omega$$

Η ενεργή τιμή του ρεύματος θα είναι:

$$\begin{cases} I_{\text{Εν}} = \frac{V_{\text{Εν}}}{Z} \\ V_{\text{Εν}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \\ V_0 = 311 \text{ V} \\ Z = 422 \Omega \end{cases} \iff I_{\text{Εν}} = 0.52 \text{ A}$$

2. Το διάγραμμα των περιστρεφόμενων διανυσμάτων είναι:



Το είδος της συμπεριφοράς χαρακτηρίζεται από:

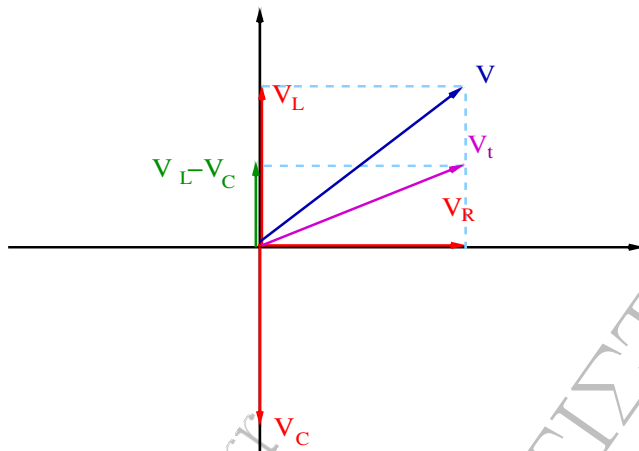
$$\begin{cases} V_L - V_C > 0 & \text{επαγωγική} \\ V_L - V_C = 0 & \text{ωμική} \\ V_L - V_C < 0 & \text{χωρητική} \end{cases}$$

Στην περίπτωση μας:

$$\begin{cases} V_L = I L \omega \\ V_C = I \frac{1}{C \omega} \end{cases} \iff V_L - V_C = I \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right) = I(90 - 500) < 0$$

Επομένως η συμπεριφορά του κυκλώματος είναι χωρητική.

3. Το βολτόμετρο μετρά την ενεργό τάση ανάμεσα στα ad , δηλαδή την τάση V του διαγράμματος.



$$\left[\begin{array}{l} V = \sqrt{V_L^2 + V_R^2} \\ V_L = I_{\text{Εν}} L \omega \\ V_R = I_{\text{Εν}} R \end{array} \right] \iff V = I_{\text{Εν}} \sqrt{90^2 + 100^2} = 70.1 \text{ V}$$

4. Τα πλάτη στις τρεις εμπεδήσεις θα είναι:

$$\left[\begin{array}{l} V_R = I_0 R \\ V_L = I_0 L \omega \\ V_C = I_0 \frac{1}{C \omega} \\ L \omega = 90 \Omega \\ \frac{1}{C \omega} = 500 \Omega \\ I_{\text{Εν}} = 0.52 \text{ A} \\ I_0 = \sqrt{2} I_{\text{Εν}} \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} V_R = 73.7 \text{ V} \\ V_L = 66.3 \text{ V} \\ V_C = 368.5 \text{ V} \end{array} \right]$$

Καθώς η τάση του πηνίου προηγείται κατά $\frac{\pi}{2}$ της τάσης της αντίστασης ενώ η τάση του πυκνωτή ακολουθεί

κατά $\frac{\pi}{2}$ την τάση της αντίστασης θα έχουμε ότι:

$$\begin{cases} v_R = 73.7 \cos(100t) \\ v_L = 66.3 \cos(100t + \frac{\pi}{2}) \\ v_C = 368.5 \cos(100t - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

5. Σε συντονισμό θα έρθει το κύκλωμα όταν η επαγωγική εμπέδιση γίνει ίση με τη χωρητική. Σε αυτή την περίπτωση $Z = R = 100 \Omega$. Η ισχύς θα είναι τότε:

$$\begin{cases} P = I_{\text{εν}}^2 Z \\ Z = R = 100 \Omega \\ I_{\text{εν}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}Z} \end{cases} \iff P = \frac{V_0^2}{2R} = 483.6 \text{ W}$$

Θέμα 4ο

Έχεις στο σπίτι σου δύο λάμπες πυράκτωσης, η μια ισχύος 120 W και η άλλη 75 W και τάσης 220 V. Έστω ότι το νήμα βολφραμίου έχει το ίδιο μήκος και στις δύο, ποιος έχει το πιο χοντρό και γιατί;

ΛΥΣΗ :

Η αντίσταση μπορεί να υπολογισθεί από την ισχύ από τη σχέση:

$$P = \frac{V^2}{R} \iff R = \frac{V^2}{P}$$

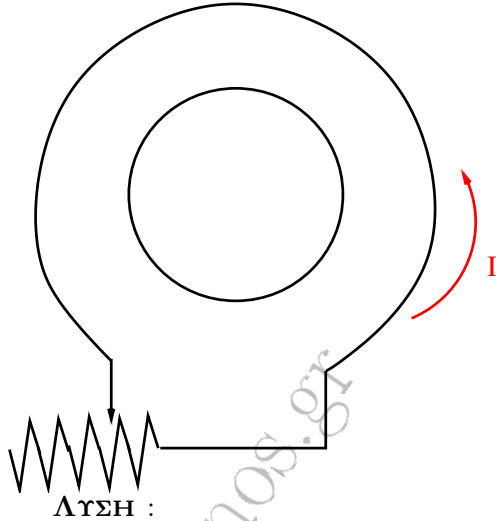
Για τα δύο νήματα θα έχουμε ότι:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{V^2}{P_1} \\ P_1 = 120 \text{ W} \\ R_1 = \rho \frac{l}{S_1} \\ R_2 = \frac{V^2}{P_2} \\ P_2 = 75 \text{ W} \\ R_2 = \rho \frac{l}{S_2} \end{cases} \iff \frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{V^2}{120}}{\frac{V^2}{75}} = \frac{\rho \frac{l}{S_1}}{\rho \frac{l}{S_2}} \iff$$

$$\frac{75}{120} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{5}{8}$$

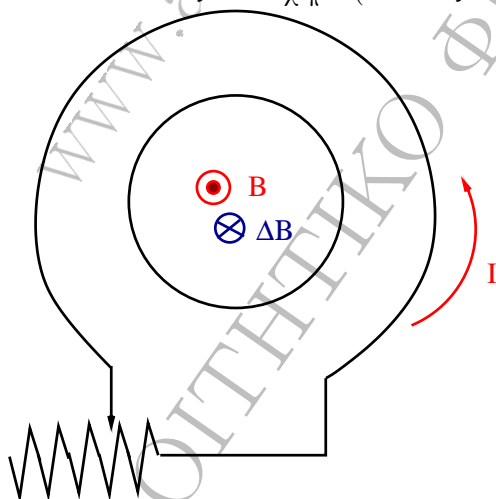
Θέμα 5ο

Αν η αντίσταση στο κύκλωμα του σχήματος αρχίσει να ελαττώνεται ποια η φορά του επαγόμενου ρεύματος στο μικρό κυκλικό βρόχο που βρίσκεται στο εσωτερικό του μεγάλου; Εξηγήστε (μον.1)



Λύση :

Το ρεύμα παράγει ένα μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του μεγάλου κυκλικού αγωγού. Το μαγνητικό αυτό πεδίο είναι όπως στο σχήμα (κανόνας δεξιού χεριού).



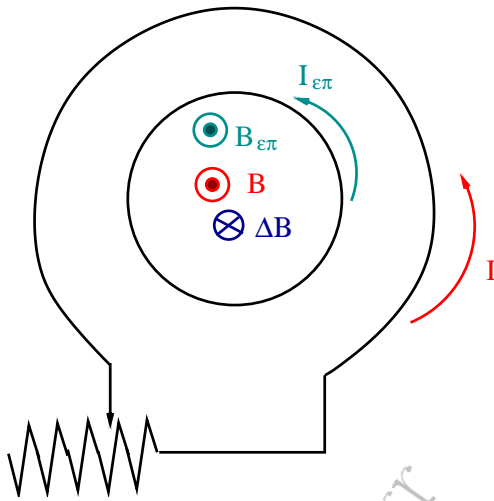
Καθώς η αντίσταση αυξάνει η τιμή της έντασης του ρεύματος θα μειώνεται και επομένως θα μειώνεται και η ένταση του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του μεγάλου κυκλικού αγωγού.

Η μαγνητική ροή που διαπερνά τον μικρό αγωγό είναι

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Η μείωση του ρεύματος οδηγεί σε μείωση της μαγνητικής ροής που διαπερνά τον μικρό αγωγό. Από τον νόμο του Faraday, θα δημιουργηθεί στο μικρό αγωγό ΗΕΔ από επαγωγή. Από τον κανόνα του Lenz το επαγόμενο ρεύμα θα έχει τέτοια φορά ώστε να δημιουργεί στο εσωτερικό του αγωγού μαγνητικό πεδίο τέτοιας φοράς ώστε η ροή του να αντισταθμίζει την μείωση της εξωτερικής μαγνητικής ροής.

Επομένως από τον κανόνα του δεξιού χεριού το ρεύμα θα έχει τη φορά του σχήματος.


Θέμα 6ο

Χρειάζεται να καταναλώσουμε 242 J ενέργειας για να μεταφέρουμε δοκιμαστικό φορτίο 0.3 mC από τη μια πλάκα επίπεδου πυκνωτή χωρητικότητας 15 μF στην άλλη σε απόσταση 10 cm. Ποιο το φορτίο στους οπλισμούς αυτού του πυκνωτή; (μον.1) Πόσο το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του; (μον. 0.5)

ΛΥΣΗ : Η ενέργεια που καταναλώνεται στο φορτίο είναι:

$$\left[\begin{array}{l} U = qV \\ q = 0.3 \text{ mC} = 3 \times 10^{-4} \text{ C} \\ U = 24 \text{ J} \end{array} \right] \Leftrightarrow V = \frac{U}{q} = 8 \times 10^4 \text{ V}$$

Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι:

$$\left[\begin{array}{l} C = \frac{Q}{V} \\ V = 8 \times 10^4 \text{ V} \\ C = 15 \text{ nF} = 15 \times 10^{-9} \text{ F} \end{array} \right] \Leftrightarrow Q = CV = 12 \times 10^{-4} \text{ C}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή δίνεται από:

$$E = \frac{V}{l} = \frac{8 \times 10^4}{10^{-1}} = 8 \times 10^5 \text{ V/m}$$