

ΘΕΜΑΤΑ ΦΙΙ

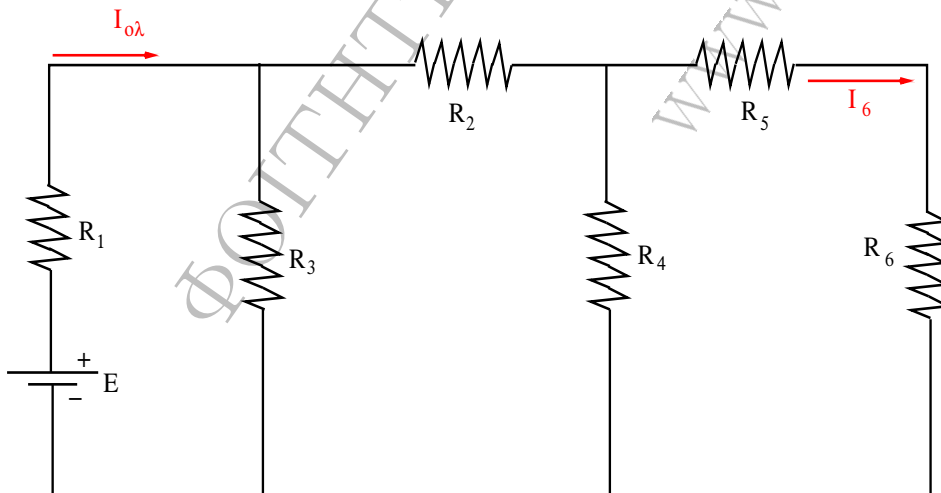
ΕΛΜΕΠΑ-Σχολή: Μηχανικών-Τμήμα: Μηχανολόγων Μηχανικών

Σεπτέμβρης 2022

Επιμέλεια : Β. Καράβολας

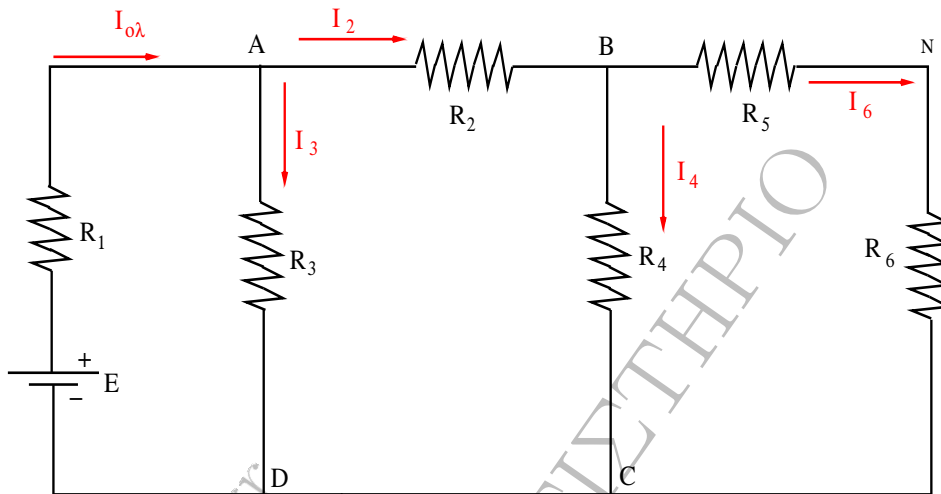
Θέμα 1ο

1. Στο παρακάτω κύκλωμα $R_1 = R_2 = R_3 = 2 \Omega$, $R_4 = 12 \Omega$, $R_5 = 8 \Omega$ και $R_6 = 4 \Omega$ Βρείτε την ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος (μον.1)
2. Αν $I_{ολ} = 5 \text{ A}$ ποια η ηλεκτρεγερτική δύναμη E της ιδανικής πηγής; (μον.0.5)
3. Ποια η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_3 ; (μον.0.5);
4. Ποια η ισχύς που καταναλώνει η R_6 ;



ΛΥΣΗ :

1. Το κύκλωμα του σχήματος είναι:

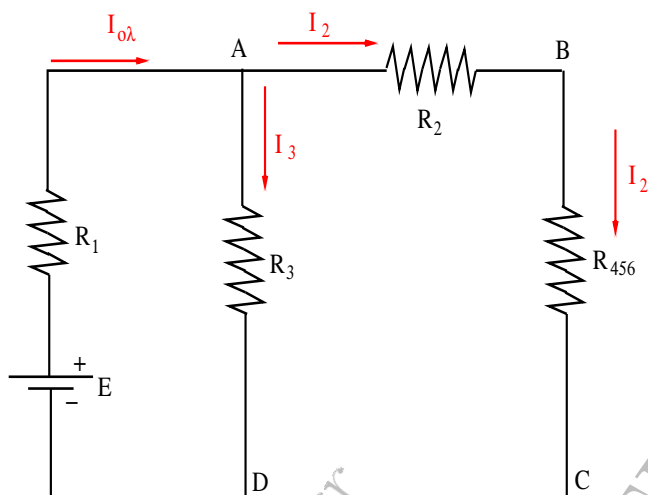


Από την πηγή πηγάζει ρεύμα $I_{0\lambda}$ το οποίο διακλαδίζεται στους δύο κόμβους (A,B) στα I_2 και I_3 και I_4 και I_6 . Παρατηρούμε ότι από τις αντιστάσεις R_5 και R_6 περνά το ίδιο ρεύμα επομένως είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Επομένως:

$$\begin{bmatrix} R_{56} = R_5 + R_6 \\ R_5 = 8 \Omega \\ R_6 = 4 \Omega \end{bmatrix} \iff R_{56} = R_5 + R_6 = 12 \Omega$$

Οι δύο κλάδοι (BC) και (ANC) έχουν κοινά άκρα, επομένως έχουν και την ίδια τάση στα άκρα τους, συνεπώς είναι συνδεδεμένοι σε παραλληλία:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_{456}} = \frac{1}{R_{56}} + \frac{1}{R_4} \\ R_{56} = 12 \Omega \\ R_4 = 12 \Omega \end{bmatrix} \iff R_{456} = 6 \Omega$$

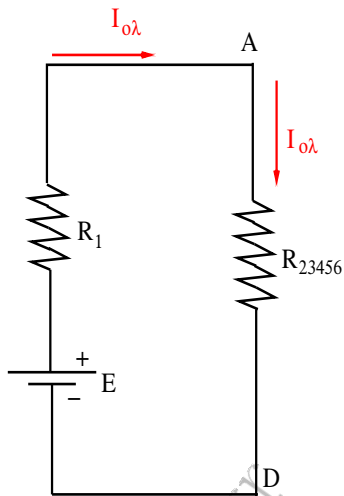


Παρατηρούμε ότι από τις αντιστάσεις R_{456} και R_3 περνά το ίδιο ρεύμα επομένως είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Επομένως:

$$\left[\begin{array}{l} R_{2456} = R_3 + R_{456} \\ R_2 = 2 \Omega \\ R_{456} = 6 \Omega \end{array} \right] \Leftrightarrow R_{2456} = 8 \Omega$$

Οι δύο κλάδοι ($ABCD$) και (AD) έχουν κοινά άκρα, επομένως έχουν και την ίδια τάση στα άκρα τους, συνεπώς είναι συνδεδεμένοι σε παραλληλία:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{R_{23456}} = \frac{1}{R_{2456}} + \frac{1}{R_2} \\ R_{2456} = 8 \Omega \\ R_2 = 2 \Omega \end{array} \right] \Leftrightarrow R_{23456} = \frac{8}{5} \Omega$$



Παρατηρούμε ότι από τις αντιστάσεις R_{23456} και R_1 περνά το ίδιο ρεύμα επομένως είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Επομένως:

$$\begin{cases} R_t = R_1 + R_{23456} \\ R_1 = 2 \Omega \\ R_{23456} = 1.6 \Omega \end{cases} \iff R_t = 3.6 \Omega$$

2. Η ΗΕΔ της πηγής είναι:

$$\begin{cases} E = I_{ολ} R_t \\ I_{ολ} = 5 A \\ R_t = 3.6 \Omega \end{cases} \iff E = 18 V$$

3. Η τάση V ανάμεσα στα A, D είναι:

$$\begin{cases} V = I_{ολ} R_{23456} \\ I_{ολ} = 5 A \\ R_{23456} = \frac{8}{5} \Omega \end{cases} \iff V = 8 V$$

Η τάση αυτή είναι η τάση στα άκρα της R_3 , επομένως:

$$\begin{cases} I_3 = \frac{V}{R_3} \\ V = 8 V \\ R_3 = 2 \Omega \end{cases} \iff I_3 = 4 A$$

4. Επίσης

$$\begin{cases} I_2 = \frac{V}{R_{2456}} \\ V = 8 \text{ V} \\ R_{2456} = 8 \Omega \end{cases} \iff I_2 = 1 \text{ A}$$

Η τάση V ανάμεσα στα B, C είναι:

$$\begin{cases} V' = I_3 R_{456} \\ I_3 = 1 \text{ A} \\ R_{456} = 6 \Omega \end{cases} \iff V = 6 \text{ V}$$

Και

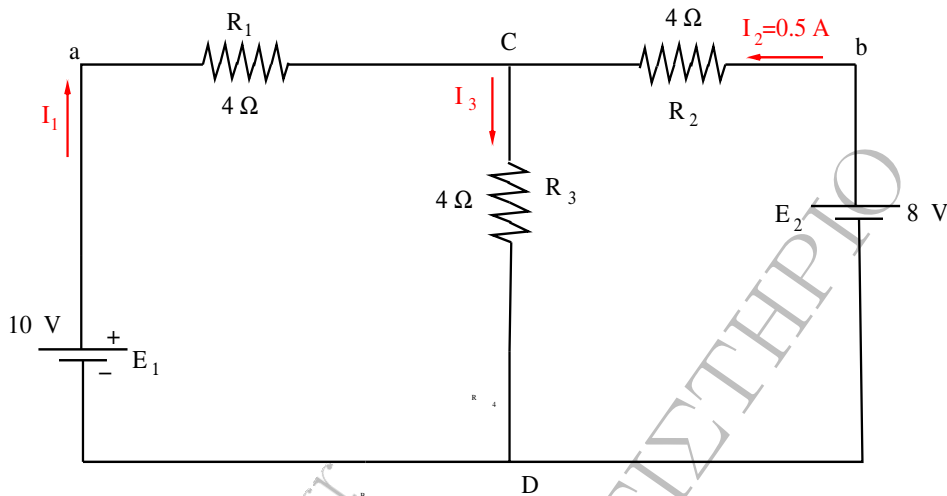
$$\begin{cases} I_6 = \frac{V'}{R_{56}} \\ V' = 6 \text{ V} \\ R_{56} = 12 \Omega \end{cases} \iff I_6 = 0.5 \text{ A}$$

Η ισχύς που καταναλώνει η R_6 θα είναι

$$\begin{cases} P_6 = I_6^2 R_6 \\ I_6 = 0.5 \text{ A} \\ R_6 = 4 \Omega \end{cases} \iff P_6 = 1 \text{ W}$$

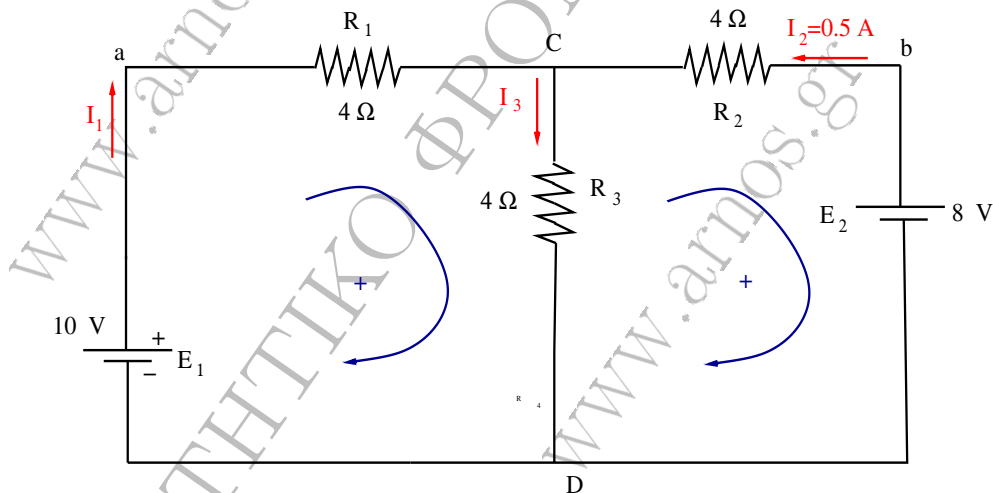
Θέμα 2ο

Στο παρακάτω κύκλωμα $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 8 \text{ V}$ και $R_1 = R_2 = R_3 = 4 \Omega$. Αν $I_2 = 0.5 \text{ A}$ βρείτε τιμή και διεύθυνση των ρευμάτων I_1 και I_3 που διαρρέουν τους αντιστάτες R_1, R_3 (μον. 1) και τη διαφορά δυναμικού στο $V_a - V_b$. (μον. 0.5)



ΛΥΣΗ :

1. Το κύκλωμα του σχήματος είναι:



Παρατηρούμε ότι εδώ έχουμε δύο κόμβους (C, D , τα σημεία στα οποία διακλαδίζεται το ρεύμα), τρεις κλάδους (CD, CaD, CbD) και τρεις βρόχους ($CDbC, CaDC, CbDaC$). Έστω n ο αριθμός των κόμβων και l ο αριθμός των βρόχων.

Επιλέγουμε φορές διαγραφής αυτές του σχήματος και στη συνέχεια εφαρμόζουμε 1ο κανόνα του Kirchhof σε $n - 1$ κόμβους (εδώ $n = 2$) και σε $l - 1$ βρόχους (εδώ $l = 3$)

Οι κανόνες για τη σωστή αναγραφή των προσήμων σε ένα βρόχο στον οποίο γράφουμε τον 2ο κανόνα του Kirchhof είναι:

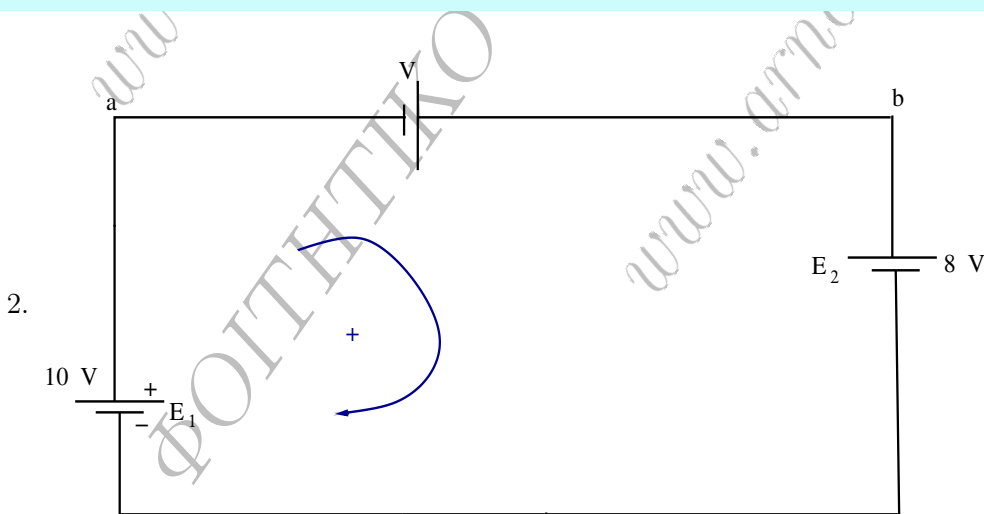
- (α') Αν κατά τη διαγραφή του βρόχου συναντήσουμε πρώτα το πρόσημο (+) σε μια τάση αναφοράς, έχουμε μείωση δυναμικού και γράφουμε την τάση με πρόσημο μείον. Αν συναντήσουμε πρώτα το πρόσημο (-) έχουμε αύξηση δυναμικού και γράφουμε την τάση με πρόσημο συν.

(β') Αν Αν κατά τη διαγραφή του βρόχου συναντήσουμε ομόρροπο με τη φορά διαγραφής ρεύμα που διαρρέει μια αντίσταση τότε γράφουμε την πτώση τάσης με πρόσημο μείον. Αν συναντήσουμε αντίρροπο ρεύμα να διαρρέει την αντίσταση τότε την πτώση τάσης με πρόσημο συν

Οι εξισώσεις που παίρνουμε είναι:

$$\begin{bmatrix} C & I_1 + I_2 = I_3 \\ \text{"βΔ"} & -E_2 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = 0 \\ \text{ABNMA} & E_1 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_1 + 0.5 = I_3 \\ -8 + 0.5 \cdot 4 + 4I_3 = 0 \\ 10 - 4I_1 - 4I_3 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_1 + 0.5 = I_3 \\ I_3 = 1.5 \text{ A} \\ I_1 = 1 \text{ A} \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι περισσεύει η μια εξίσωση. Συνεπώς μας δόθηκε ένα δεδομένο περισσότερο από όσα χρειαζόμασταν.



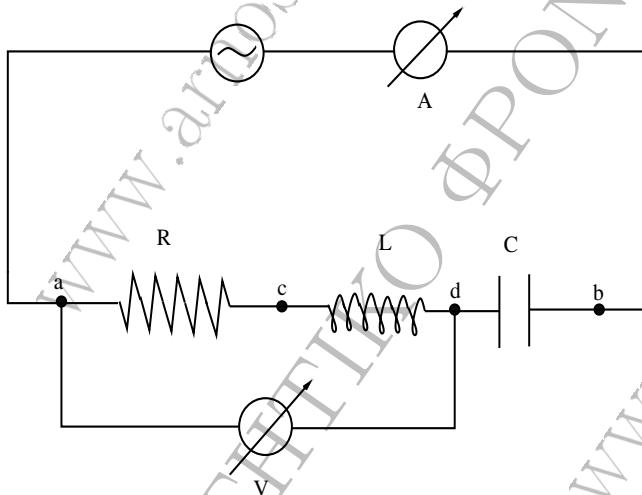
Ξαναγράφουμε τον Β κανόνα του Kirchhoff για τον βρόχο $CbDaC$ έχοντας αντικαταστήσει τον κλάδο ab με μια πηγή τάσης V με ίδια πολικότητα με την E_1 .

$$\begin{bmatrix} E_1 - E_2 + V = 0 \\ V = V_b - V_a \end{bmatrix} \Leftrightarrow 10 - 8 = V_a - V_b \Leftrightarrow V_a - V_b = 2 \text{ V}$$

Θέμα 3ο

Στα άκρα πηγής εναλλασσόμενης τάσης συχνότητας $f = 400 \text{ Hz}$ συνδέονται σε σειρά αντίστασης $R = 220 \Omega$, πυκνωτής $C = 24 \mu\text{F}$ και πηνίο $L = 150 \text{ mH}$. Το πλάτος τάσης στα άκρα της πηγής είναι 220 V .

1. Βρείτε την ένδειξη του αμπερομέτρου (μον.1)
2. Φτιάξτε διάγραμμα περιστρεφόμενων διανυσμάτων και βρείτε το συντελεστή ισχύος του κυκλώματος (μον. 0.5)
3. Αν η στιγμιαία τάση στα άκρα της αντίστασης είναι $v_R(t) = V_R \cos(800\pi t)$ γράψτε τις στιγμιαίες τάσεις $v_L(t)$ και $v_C(t)$ (μον. 0.5);
4. Ποιος ο ρυθμός με τον οποίο η πηγή προσφέρει ενέργεια στο κύκλωμα; (μον (0.5))



ΛΥΣΗ :

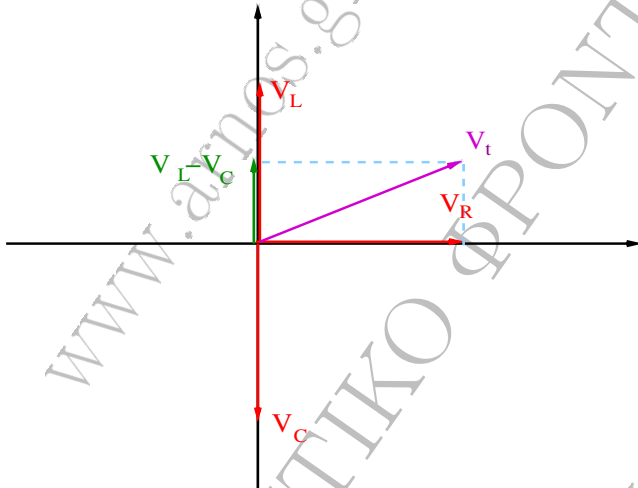
1. Το αμπερόμετρο μετρά ενεργές τιμές έντασης ρεύματος. Η συνολική εμπέδηση του κυκλώματος είναι:

$$\left[\begin{array}{l} Z = \sqrt{(Z_L - Z_C)^2 + R^2} \\ Z_L = L\omega \\ Z_C = \frac{1}{C\omega} \\ \omega = 2\pi f = 800\pi \text{ r/s} \end{array} \right] \Leftrightarrow Z = \sqrt{220^2 + \left(0.150 \cdot 800\pi - \frac{1}{24 \times 10^{-6} \cdot 800\pi}\right)^2} = 422.25 \Omega$$

Η ενεργή τιμή του ρεύματος θα είναι:

$$\begin{cases} I_{\text{Εν}} = \frac{V_{\text{Εν}}}{Z} \\ V_{\text{Εν}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \\ V_0 = 220 \text{ V} \\ Z = 422.25 \Omega \end{cases} \iff I_{\text{Εν}} = 0.368 \text{ A}$$

2. Το διάγραμμα των περιστρεφόμενων διανυσμάτων είναι:



Ο συντελεστής ισχύος του κυκλώματος είναι:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{R}{Z} \\ R = 220 \Omega \\ Z = 422.25 \Omega \end{cases} \iff \cos \theta = 0.521$$

3. Επίσης θα έχουμε ότι:

$$\tan \theta = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \iff \tan \theta = \frac{360}{220} = 1.638$$

Η $\tan \theta > 0$ επομένως $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι $\theta = 1.022 \text{ rad}$

Τα πλάτη στις τρεις εμπεδήσεις θα είναι:

$$\begin{array}{l}
 V_R = I_0 R \\
 V_L = I_0 L \omega \\
 V_C = I_0 \frac{1}{C \omega} \\
 L \omega = 377 \, \Omega \\
 \frac{1}{C \omega} = 16.57 \, \Omega \\
 I_0 = I_{\varepsilon \nu} \sqrt{2} \\
 I_{\varepsilon \nu} = 0.368 \, A
 \end{array}
 \iff
 \begin{array}{l}
 V_R = 114.6 \, V \\
 V_L = 196.41 \, V \\
 V_C = 8.63 \, V
 \end{array}$$

Καθώς η τάση του πηνίου προηγείται κατά $\frac{\pi}{2}$ της τάσης της αντίστασης ενώ η τάση του πυκνωτή ακολουθεί κατά $\frac{\pi}{2}$ την τάση της αντίστασης θα έχουμε ότι:

$$\begin{array}{l}
 v_R = 114.6 \cos(800\pi t) \\
 v_L = 196.41 \cos\left(800\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \\
 v_C = 8.63 \cos\left(800\pi t - \frac{\pi}{2}\right)
 \end{array}$$

4. Η ισχύς της πηγής καταναλώνεται μόνο στην αντίσταση, επομένως η μέση ισχύς της οηγής θα είναι:

$$\bar{P} = I_{\varepsilon \nu}^2 R = 29.86 \, W$$

Η στιγμιαία ισχύς θα είναι:

$$\left[\begin{array}{l} P = VI \\ I = I_0 \cos(\omega t) \\ I_0 = I_{\text{εν}} \sqrt{2} \\ V = V_0 \cos(\omega t + \theta) \\ V_0 = 220 \text{ V} \\ \theta = 1.0022 \text{ r} \end{array} \right] \Leftrightarrow P = 114.62 \cos(800\pi t) \cos(800\pi t + 1.0022) \text{ W}$$

Θέμα 4ο

Στο κέντρο κύβου ακμής 1 m υπάρχει σημειακό φορτίο 3 nC ενώ σε απόσταση 10 cm από αυτό άλλο φορτίο -2 nC . Βρείτε την ηλεκτρική ροή που διαπερνά την επιφάνεια του κύβου.

ΛΥΣΗ :

Από το νόμο του Gauss η ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια Φ δίνεται από

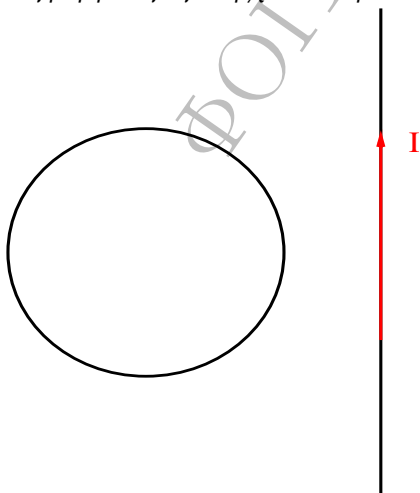
$$\Phi = \frac{q_t}{\epsilon_0}$$

όπου q_t το συνολικό φορτίο που περικλείεται μέσα στην επιφάνεια. Στην περίπτωση μας στο εσωτερικό του κύβου βρίσκονται και τα δύο φορτία, επομένως

$$\Phi = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0} = \frac{3 \times 10^{-9} + (-2) \times 10^{-9}}{8.85 \times 10^{-12}} = \frac{1}{8.85} \times 10^3 = 113 \text{ V} \cdot \text{m}$$

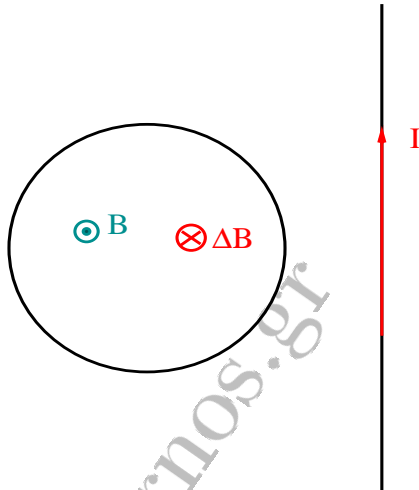
Θέμα 5ο

Ποια η φορά του επαγόμενου ρεύματος στον κυκλικό βρόχο του παρακάτω σχήματος αν το ρεύμα I στον ευθύγραμμο αγωγό αρχίσει να μειώνεται; Εξηγήστε (μον.1)



ΛΥΣΗ :

Το ρεύμα παράγει ένα μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του κυκλικού αγωγού. Το μαγνητικό αυτό πεδίο είναι όπως στο σχήμα (κανόνας δεξιού χεριού).



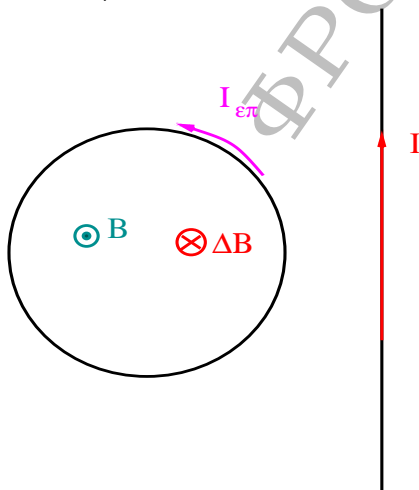
Καθώς η τιμή της έντασης του ρεύματος μειώνεται και επομένως θα μειώνεται και η ένταση του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του κυκλικού αγωγού.

Η μαγνητική ροή που διαπερνά τον μικρό αγωγό είναι

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Η μείωση του ρεύματος οδηγεί σε μείωση της μαγνητικής ροής που διαπερνά τον κυκλικό αγωγό. Από τον νόμο του Faraday, θα δημιουργηθεί στο κυκλικό αγωγό ΗΕΔ από επαγωγή. Από τον κανόνα του Lenz το επαγόμενο ρεύμα θα έχει τέτοια φορά ώστε να δημιουργεί στο εσωτερικό του αγωγού μαγνητικό πεδίο τέτοιας φοράς ώστε η ροή του να αντισταθμίζει την μείωση της εξωτερικής μαγνητικής ροής.

Επομένως από τον κανόνα του δεξιού χεριού το ρεύμα θα έχει τη φορά του σχήματος.


Θέμα 6ο

Επίπεδος πυκνωτής φορτίζεται με τάση 200 V και αποσυνδέεται από την πηγή. Αν η απόσταση μεταξύ των

οπλισμών αυξηθεί από 1 σε 3 cm βρείτε το λόγο U/U_0 όπου U_0 η αρχική αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή και U η ενέργεια μετά την απομάκρυνση των οπλισμών του. (μον.1)

ΛΥΣΗ :

Κανόνες για αυτές τις ασκήσεις:

1. Αν ο πυκνωτής παραμένει συνδεδεμένος στην πηγή τότε η τάση στα άκρα του παραμένει σταθερή.
2. Αν ο πυκνωτής αποσυνδεθεί από την πηγή τότε το φορτίο του παραμένει σταθερό

Στην περίπτωση μας ο πυκνωτής αποσυνδέθηκε από την πηγή, επομένως έχει σταθερό φορτίο. Η χωρητικότητα του πυκνωτή στις δύο περιπτώσεις δίνεται από τη σχέση:

$$\left[\begin{array}{l} C = \epsilon_0 \frac{S}{l} \\ l_1 = 1 \text{ cm} \\ l_2 = 3 \text{ cm} = 3l_1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{l_1} \\ C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{l_2} \end{array} \right] \Leftrightarrow C_1 = 3C_2$$

Η ενέργεια του πυκνωτή θα είναι:

$$U = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} U_0 = \frac{Q^2}{2C_1} \\ U = \frac{Q^2}{2C_2} \end{array} \right] \Leftrightarrow C_1 = 3C_2$$

$$\frac{U}{U_0} = \frac{C_1}{C_2} = 3$$

όπου επιλέξαμε τη σχέση για την ενέργεια όπου έχει μόνο μία μεταβλητή (την χωρητικότητα) και όχι και δεύτερη (την τάση).