

ΘΕΜΑΤΑ ΦΙΙ

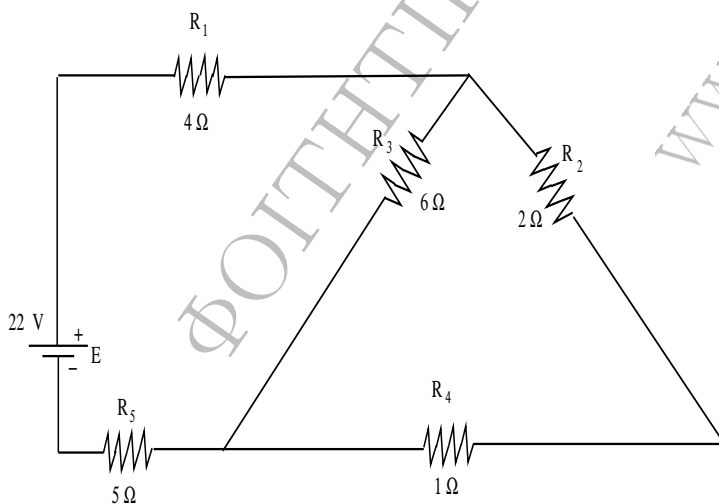
ΕΛΜΕΠΑ-Σχολή: Μηχανικών-Τμήμα: Μηχανολόγων Μηχανικών

Ιούνιος 2022 - Ομάδα (B)

Επιμέλεια : Β. Καράβολας

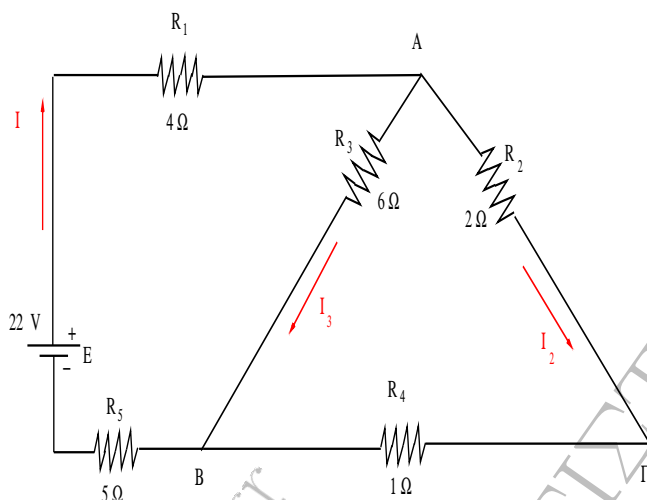
Θέμα 1ο

1. Βρείτε την ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος (μον.1)
2. Ποια η ισχύς που καταναλώνεται στον αντιστάτη των $R = 4 \Omega$; (μον.0.5)
3. Ποια η τάση στα άκρα του αντιστάτη των 6Ω ; (μον.1);



ΛΥΣΗ :

1. Το κύκλωμα του σχήματος είναι:



Από την πηγή πηγάζει ρεύμα I το οποίο διακλαδίζεται στους δύο κόμβους στα I_1 και I_2 . Παρατηρούμε ότι από τις αντιστάσεις R_2 και R_4 περνά το ίδιο ρεύμα επομένως είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Επομένως:

$$\left[\begin{array}{l} R_{24} = R_2 + R_4 \\ R_2 = 2 \Omega \\ R_4 = 1 \Omega \end{array} \right] \iff R_{24} = R_2 + R_4 = 3 \Omega \quad (1)$$

Οι δύο κλάδοι (ΑΓΒ) και (ΑΒ) έχουν κοινά άκρα, επομένως έχουν και την ίδια τάση στα άκρα τους, συνεπώς είναι συνδεδεμένοι σε παραλληλία:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{R_{\parallel}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{24}} \\ R_3 = 6 \Omega \\ R_{24} = 3 \Omega \end{array} \right] \iff R_{\parallel} = 2 \Omega$$

Από την συνολική αντίσταση των δύο κλάδων (R_{\parallel}) περνά όλο το ρεύμα που παράγει η πηγή. Το ίδιο συμβαίνει και με τις R_1 και R_5 . Συνεπώς η R_1 η R_5 και η R_{\parallel} είναι σε σειρά και η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$\left[\begin{array}{l} R_t = R_5 + R_{\parallel} + R_1 \\ R_{\parallel} = 2 \Omega \\ R_5 = 5 \Omega \\ R_1 = 4 \Omega \end{array} \right] \iff R_t = 11 \Omega$$

2. Το ρεύμα που διαρρέει το εξωτερικό κύκλωμα θα είναι από το νόμο του Ohm

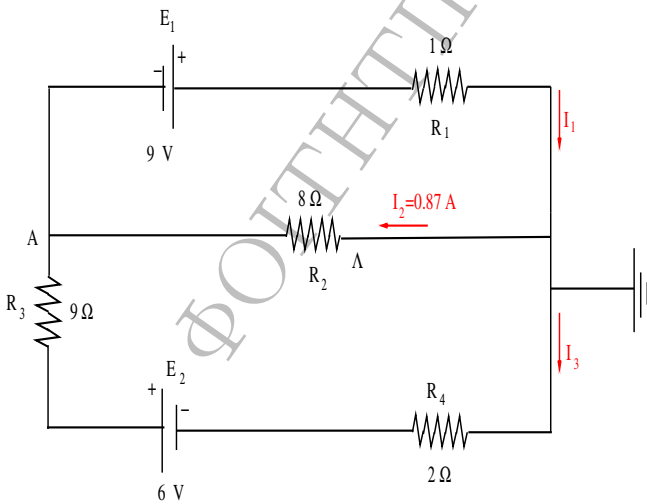
$$\begin{cases} I = \frac{E}{R_t} \\ E = 22 \text{ V} \\ R_t = 11 \Omega \end{cases} \iff I = 2 \text{ A}$$

Η διαφορά δυναμικού V_{AB} είναι:

$$\begin{cases} V_{AB} = IR_{\parallel} \\ I = 2 \text{ A} \\ R_{\parallel} = 2 \text{ gOm} \end{cases} \iff V_{AB} = 4 \text{ V}$$

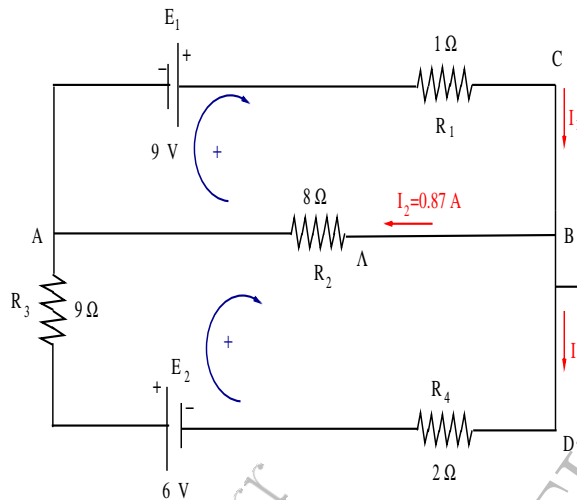
Θέμα 2ο

Στο παρακάτω κύκλωμα βρείτε τα I_1 και I_2 (μον. 1) και το δυναμικό στο A (μον. 0.5)



ΛΥΣΗ :

1. Το κύκλωμα του σχήματος είναι:



Παρατηρούμε ότι εδώ έχουμε δύο κόμβους (A, B, τα σημεία στα οποία διακλαδίζεται το ρεύμα), τρεις κλάδους (AB, ACB, ADB) και τρεις βρόχους (ACBA, ADBA, ACBDA). Έστω n ο αριθμός των κόμβων και l ο αριθμός των βρόχων.

Επιλέγουμε φορές διαγραφής αυτές του σχήματος και στη συνέχεια εφαρμόζουμε 1ο κανόνα του Kirchhof σε $n - 1$ κόμβους (εδώ $n = 2$) και σε $l - 1$ βρόχους (εδώ $l = 3$)

Οι κανόνες για τη σωστή αναγραφή των προσήμων σε ένα βρόχο στον οποίο γράφουμε τον 2ο κανόνα του Kirchhof είναι:

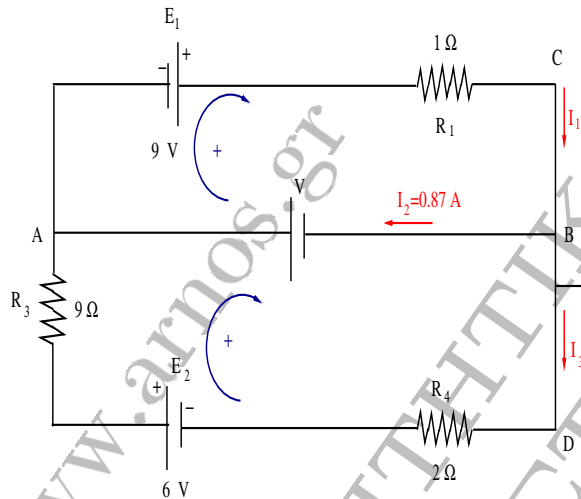
- (α') Αν κατά τη διαγραφή του βρόχου συναντήσουμε πρώτα το πρόσημο (+) σε μια τάση αναφοράς, έχουμε μείωση δυναμικού και γράφουμε την τάση με πρόσημο μείον. Αν συναντήσουμε πρώτα το πρόσημο (-) έχουμε αύξηση δυναμικού και γράφουμε την τάση με πρόσημο συν.
- (β') Αν κατά τη διαγραφή του βρόχου συναντήσουμε ομόρροπο με τη φορά διαγραφής ρεύμα που διαρρέει μια αντίσταση τότε γράφουμε την πτώση τάσης με πρόσημο μείον. Αν συναντήσουμε αντίρροπο ρεύμα να διαρρέει την αντίσταση τότε την πτώση τάσης με πρόσημο συν

Οι εξισώσεις που παίρνουμε είναι:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{l} A \\ ACBA \\ ADBA \end{array} \right] \begin{array}{l} I_1 = I_2 + I_3 \\ E_1 - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \\ E_2 - I_3 R_4 - I_3 R_3 + I_2 R_2 = 0 \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} I_1 = 0.87 + I_3 \\ 9 - I_1 - 8 \cdot 0.87 = 0 \iff I_1 = 2.04 \text{ A} \\ 6 - I_3 R_4 - I_3 R_3 + I_2 R_2 = 0 \end{array} \right] \iff \\
 & \left[\begin{array}{l} I_1 = 2.04 \text{ A} \\ I_3 = 1.17 \text{ A} \\ 6 - 11I_3 + 0.87 \cdot 8 = 0 = \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι περισσεύει η μια εξίσωση. Συνεπώς μας δόθηκε ένα δεδομένο περισσότερο από όσα χρειαζόμασταν.

2. Το σημείο B συνδέεται μέσω σύρματος μηδενικής αντίστασης με τη Γη (γείωση), επομένως θα έχει το δυναμικό της Γης που είναι μηδενικό.



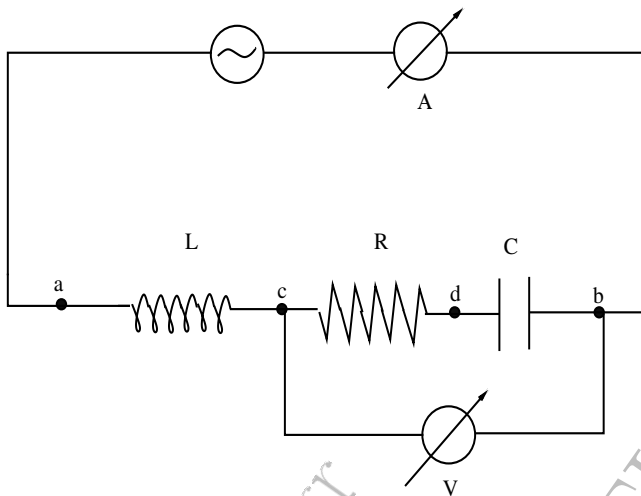
Ξαναγράφουμε τον Β κανόνα του Kirchhoff για τον βρόχο $BACBA$ έχοντας αντικαταστήσει τον κλάδο AB με μια πηγή τάσης V .

$$\begin{bmatrix} E_1 - I_1 R_1 + V = 0 \\ V = V_A - V_B \\ V_B = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 9 - 2.04 = -V_A + 0 \Leftrightarrow V_A = -6.96 \text{ V}$$

Θέμα 3ο

Στα άκρα πηγής εναλλασσόμενης τάσης κυκλικής συχνότητας $\omega = 800 \text{ r/s}$ συνδέονται σε σειρά αντιστάτης $R = 100 \Omega$, πυκνωτής $C = 2\mu\text{F}$ και πηνίο $L = 0.9 \text{ H}$. Το πλάτος τάσης στα άκρα της πηγής είναι 311 V .

1. Βρείτε την ένδειξη του αμπερομέτρου (μον.1)
2. Φτιάξτε διάγραμμα περιστρεφόμενων διανυσμάτων και πείτε τη συμπεριφορά εμφανίζει το κύκλωμα (επαγωγική ή χωρητική) εξηγώντας το (μον. 0.5)
3. Βρείτε ποια τάση θα μετρήσει το βολτόμετρο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (μον. 1);
4. Τι ρύθμιση πρέπει να γίνει ώστε το κύκλωμα να έρθει σε συντονισμό (μον. 0.5)



ΛΥΣΗ :

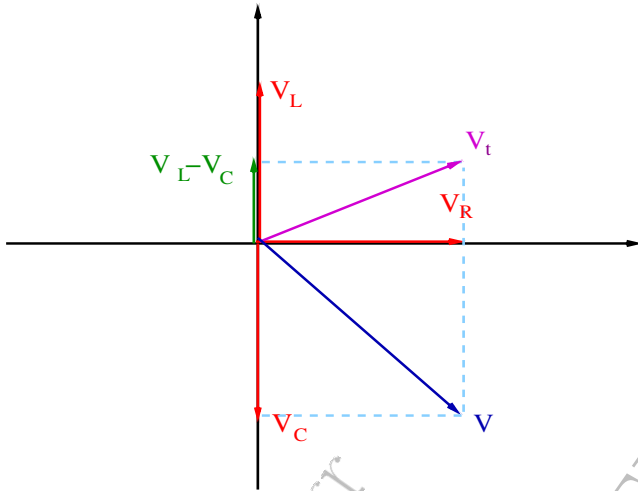
1. Το αμπερόμετρο μετρά ενεργές τιμές έντασης ρεύματος. Η συνολική εμπέδηση του κυκλώματος είναι:

$$\left[\begin{array}{l} Z = \sqrt{(Z_L - Z_C)^2 + R^2} \\ Z_L = L\omega \\ Z_C = \frac{1}{C\omega} \end{array} \right] \Leftrightarrow Z = \sqrt{100^2 + \left(0.9 \cdot 800 - \frac{1}{2 \times 10^{-6} \cdot 800}\right)^2} = 137.93 \Omega$$

Η ενεργή τιμή του ρεύματος θα είναι:

$$\left[\begin{array}{l} I_{\text{Εν}} = \frac{V_{\text{Εν}}}{Z} \\ V_{\text{Εν}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \\ V_0 = 311 \text{ V} \\ Z = 137.93 \Omega \end{array} \right] \Leftrightarrow I_{\text{Εν}} = 1.6 \text{ A}$$

2. Το διάγραμμα των περιστρεφόμενων διανυσμάτων είναι:



Το είδος της συμπεριφοράς χαρακτηρίζεται από:

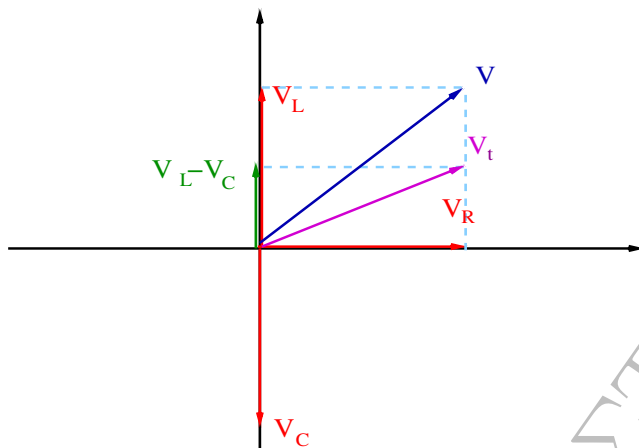
$$\left[\begin{array}{ll} V_L - V_C > 0 & \text{επαγωγική} \\ V_L - V_C = 0 & \text{ωμική} \\ V_L - V_C < 0 & \text{χωρητική} \end{array} \right]$$

Στην περίπτωση μας:

$$\left[\begin{array}{l} V_L = IL\omega \\ V_C = I\frac{1}{C\omega} \end{array} \right] \Leftrightarrow V_L - V_C = I\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = I(720 - 625) > 0$$

Επομένως η συμπεριφορά του κυκλώματος είναι επαγωγική.

3. Το βολτόμετρο μετρά την ενεργό τάση ανάμεσα στα ac , δηλαδή την τάση V του διαγράμματος.



$$\left[\begin{array}{l} V = \sqrt{V_C^2 + V_R^2} \\ V_C = I_{\epsilon\nu} \frac{1}{C\omega} \\ V_R = I_{\epsilon\nu} R \end{array} \right] \iff V = I_{\epsilon\nu} \sqrt{625^2 + 100^2} = 1009 \text{ V}$$

4. Σε συντονισμό θα έρθει το κύκλωμα όταν η επαγωγική εμπέδιση γίνει ίση με τη χωρητική. Καθώς τα L, C δεν μεταβάλλονται, θα πρέπει να μεταβληθεί η κυκλική συχνότητα της πηγής:

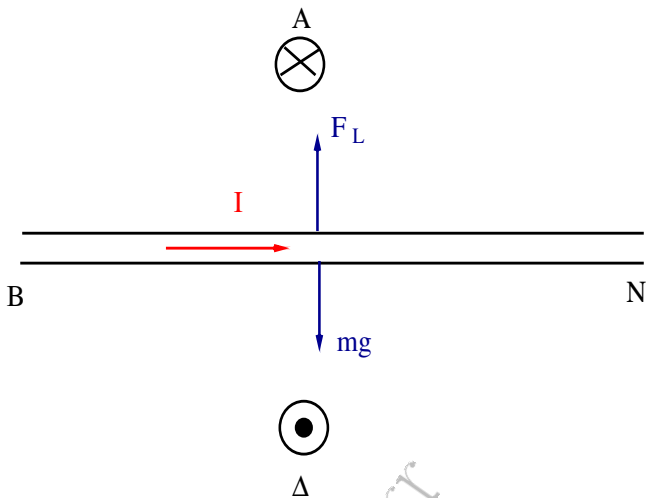
$$\left[\begin{array}{l} Z_L = L\omega \\ Z_C = \frac{1}{C\omega} \\ Z_L = Z_C \end{array} \right] \iff \omega^2 = \frac{1}{LC} \iff \omega = 745.35 \text{ rad/s}$$

Θέμα 4ο

Ευθύγραμμος αγωγός μάζας $m = 20 \text{ g}$ και μήκους 0.5 m παράλληλος προς το έδαφος διαρρέεται από ρεύμα έντασης 4 A σε κατεύθυνση από Βορρά προς Νότο. Βρείτε διεύθυνση, φορά και μέτρο ομογενούς μαγνητικού πεδίου ώστε ο αγωγός να αιωτείται. Κάντε σχέδιο. θεωρείστε το $g = 10 \text{ m/s}^2$ (μον.1)

ΛΥΣΗ :

Για να αιωρείται ο αγωγός θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται να είναι μηδενική. Εδώ δέχεται δύο δυνάμεις. Μια το βάρος του και μια την ηλεκτρομαγνητική δύναμη Laplace.



Οι δυνάμεις είναι όπως στο σχήμα. Από τη φορά της δύναμης Laplace και τον κανόνα του δεξιού χεριού θα έχουμε ότι η ένταση του μαγνητικού πεδίου θα είναι στη διεύθυνση Βοράς - Νότος με κατεύθυνση προς το Νότο. Το μέτρο του θα είναι

$$\left[\begin{array}{l} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{F} = mg = F_L \\ F_L = BI l \\ l = 1 \text{ m} \\ m = 0.02 \text{ kg} \\ I = 4 \text{ A} \end{array} \right] \Leftrightarrow B = \frac{mg}{Il} = 0.05 \text{ T}$$

Θέμα 5ο

Ένας επίπεδος πυκνωτής αέρα με χωρητικότητα $C = 0.02 \mu\text{F}$ συνδέθηκε με πηγή έχοντας φορτίο $Q = 10^{-8} \text{ C}$. να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή και των εμβαδόν των οπλισμών του αν η απόστασή τους είναι 5 mm (μον.1)

ΛΥΣΗ :

Από τον ορισμό της χωρητικότητας θα έχουμε ότι:

$$\left[\begin{array}{l} C = \frac{Q}{V} \\ C = 0.02 \mu\text{F} = 2 \times 10^{-8} \text{ F} \\ Q = 10^{-8} \text{ C} \end{array} \right] \Leftrightarrow V = \frac{Q}{C} = 0.5 \text{ V}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση:

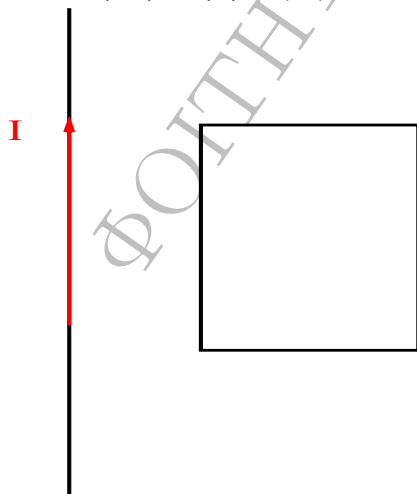
$$\left[\begin{array}{l} E = \frac{V}{l} \\ V = 0.5 \text{ V} \\ l = 5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \end{array} \right] \Leftrightarrow E = \frac{0.5}{0.005} = 100 \text{ V/m}$$

Η χωρητικότητα του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$\left[\begin{array}{l} C = \epsilon \epsilon_0 \frac{S}{l} \\ \epsilon = 1 \text{ αέρας} \\ \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2) \\ C = 0.02 \mu\text{F} = 2 \times 10^{-8} \text{ F} \\ l = 5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \end{array} \right] \Leftrightarrow S = \frac{Cl}{\epsilon_0} = 11.29 \text{ m}^2$$

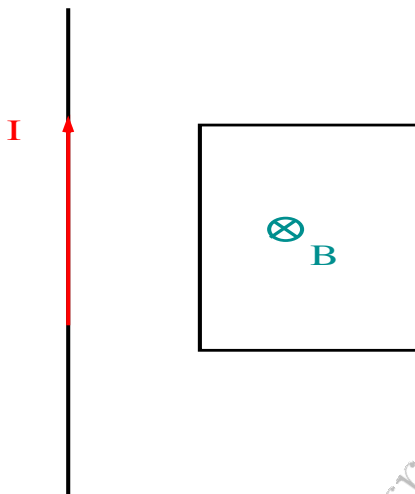
Θέμα 6ο

Ποια η φορά του επαγόμενου ρεύματος στον ορθογώνιο βρόχο του παρακάτω σχήματος αν τον απομακρύνουμε από τον ρευματοφόρο αγωγό κινώντας τον προς τα δεξιά; Εξηγήστε (μον.1.5)



ΛΥΣΗ :

Το ρεύμα παράγει ένα μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του κυκλικού αγωγού. Το μαγνητικό αυτό πεδίο είναι όπως στο σχήμα (κανόνας δεξιού χεριού).



Η τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου σε απόσταση r από τον αγωγό δίνεται από τη σχέση:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Καθώς απομακρύνεται ο βρόχος από τον αγωγό η τιμή του B θα μειώνεται και επομένως και η ροή που διαπερνά το βρόχο θα μειώνεται.

Η μαγνητική ροή που διαπερνά το βρόχο είναι

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Από τον νόμο του Faraday, θα δημιουργηθεί στο βρόχο ΗΕΔ από επαγωγή. Από τον κανόνα του Lenz το επαγόμενο ρεύμα θα έχει τέτοια φορά ώστε να δημιουργεί στο εσωτερικό του αγωγού μαγνητικό πεδίο τέτοιας φοράς ώστε η ροή του να αντισταθμίζει την μείωση της εξωτερικής μαγνητικής ροής.

Επομένως από τον κανόνα του δεξιού χεριού το ρεύμα θα έχει τη φορά του σχήματος.

