

ΘΕΜΑΤΑ ΦΙΙ - ΟΜΑΔΑ Β

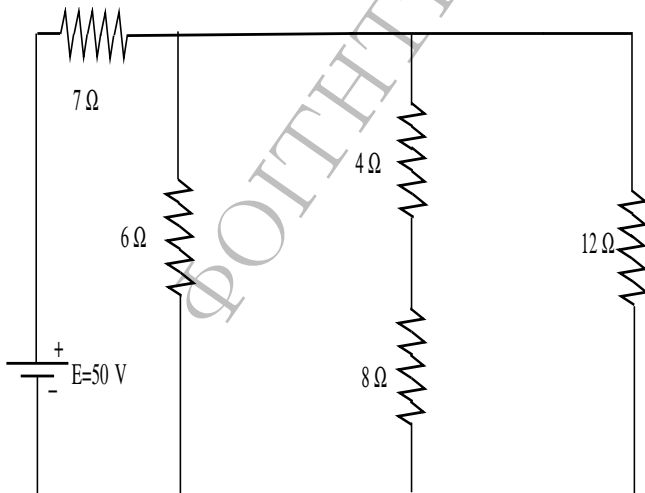
ΕΛΜΕΠΑ-Σχολή: Μηχανικών-Τμήμα: Μηχανολόγων Μηχανικών

Ιούνης 2023

Επιμέλεια : Β. Καράβολας

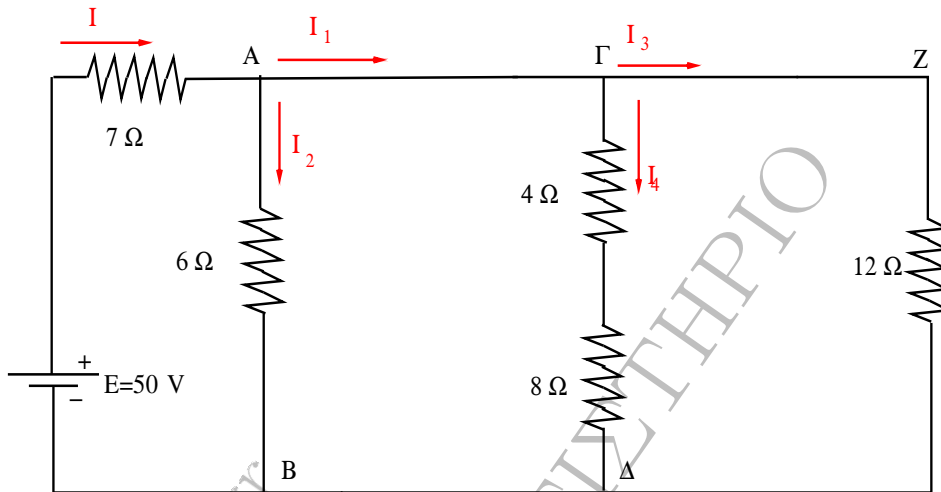
Θέμα 1ο

1. Βρείτε την ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος (μον.0.5)
2. Ποια η ισχύς που αποδίδει η πηγή στο εξωτερικό κύκλωμα; (μον.0.5)
3. Ποια η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη των 12Ω (μον.0.5);
4. Ποια η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη των 8Ω (μον.0.5);



ΛΥΣΗ :

1. Το κύκλωμα του σχήματος είναι:

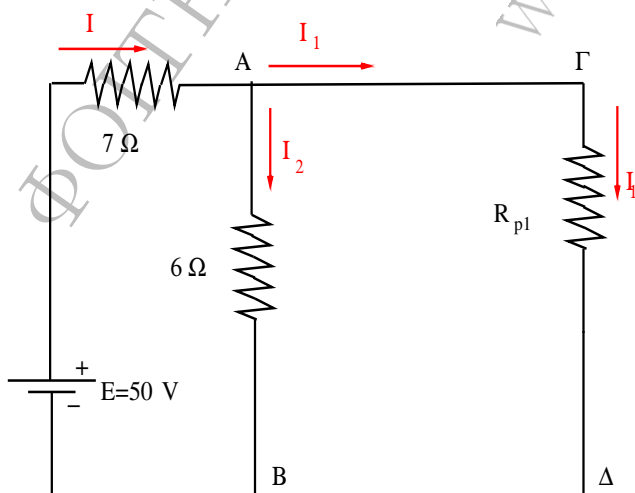


Από την πηγή πηγάζει ρεύμα I το οποίο διακλαδίζεται στους δύο κόμβους (Α,Γ) στα I_1 και I_2 και I_3 και I_4 . Παρατηρούμε ότι από τις αντιστάσεις στον κλάδο ΓΔ ότι διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα επομένως είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Επομένως:

$$R_s = 4 + 8 = 12 \Omega$$

Οι δύο κλάδοι (ΓΔ) και (ΓΖΔ) έχουν κοινά άκρα, επομένως έχουν και την ίδια τάση στα άκρα τους, συνεπώς είναι συνδεδεμένοι σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{p1}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \iff R_{p1} = 6 \Omega$$

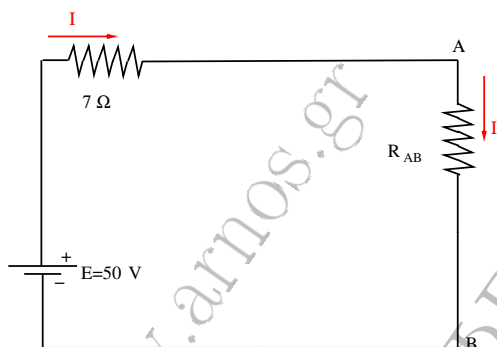


Οι δύο κλάδοι (ΑΒ) και (ΑΓΔΒ) έχουν κοινά άκρα, επομένως έχουν και την ίδια τάση στα άκρα τους,

συντεώς είναι συνδεδεμένοι σε παράλληλα:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{R_{p1}} \\ R_{p1} = 6 \Omega \end{array} \right] \Leftrightarrow R_{AB} = 3 \Omega$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :Θα μπορούσαμε να πάρουμε απευθείας και τους τρεις κλάδους (AB, ΓΔ, ΓΖΔ)συνδεδεμένους παράλληλα.



Παρατηρούμε ότι από τις αντιστάσεις $R_1 = 7 \Omega$ και R_{AB} περνά το ίδιο ρεύμα επομένως είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Επομένως:

$$\left[\begin{array}{l} R_t = R_1 + R_{AB} \\ R_1 = 7 \Omega \\ R_{AB} = 3 \Omega \end{array} \right] \Leftrightarrow R_t = 10 \Omega$$

2. Το ρεύμα που διαρρέει την πηγή είναι:

$$\left[\begin{array}{l} E = IR_t \\ E = 50 V \\ R_t = 10 \Omega \end{array} \right] \Leftrightarrow I = 5 A$$

Η ισχύς της πηγής είναι:

$$\left[\begin{array}{l} P = EI \\ E = 50 V \\ I = 5 A \end{array} \right] \Leftrightarrow P = 250 W$$

3. Η τάση V ανάμεσα στα A, B είναι:

$$\begin{cases} V = IR_{AB} \\ I = 5 \text{ A} \\ R_{AB} = 3 \Omega \end{cases} \iff V = 15 \text{ V}$$

Η τάση αυτή είναι η τάση στα άκρα της $R_5 = 12 \Omega$, επομένως:

$$\begin{cases} P_5 = \frac{V^2}{R_5} \\ V = 15 \text{ V} \\ R_5 = 12 \Omega \end{cases} \iff P_5 = 18.75 \text{ W}$$

4. Το ρεύμα I_4 θα είναι από το νόμο του Ohm:

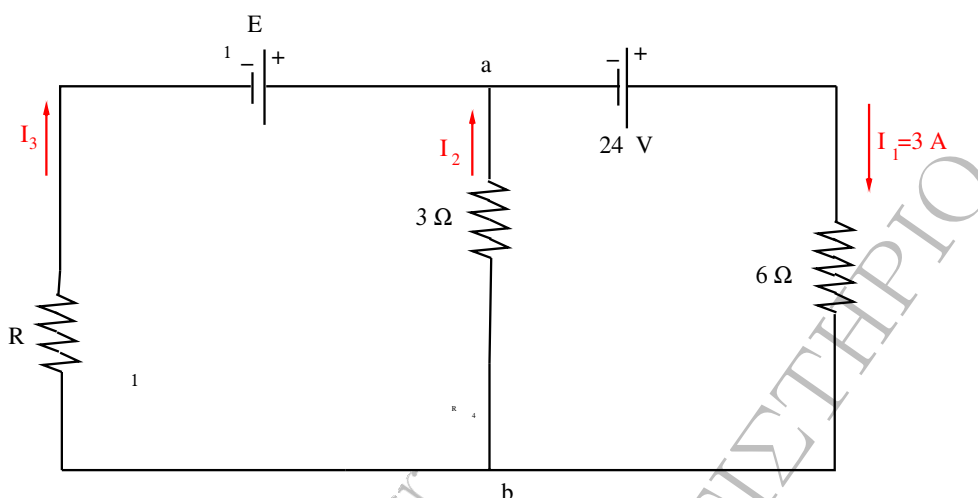
$$\begin{cases} I_4 = \frac{V}{R_s} \\ V = 15 \text{ V} \\ R_s = 12 \Omega \end{cases} \iff I_4 = 1.25 \text{ A}$$

Η ισχύς που διαρρέει τον αντιστάτη $R_4 = 8 \Omega$ θα είναι:

$$\begin{cases} P_4 = I_4^2 R_4 \\ I_4 = 1.25 \text{ A} \\ R_4 = 8 \Omega \end{cases} \iff P_4 = 12.5 \text{ W}$$

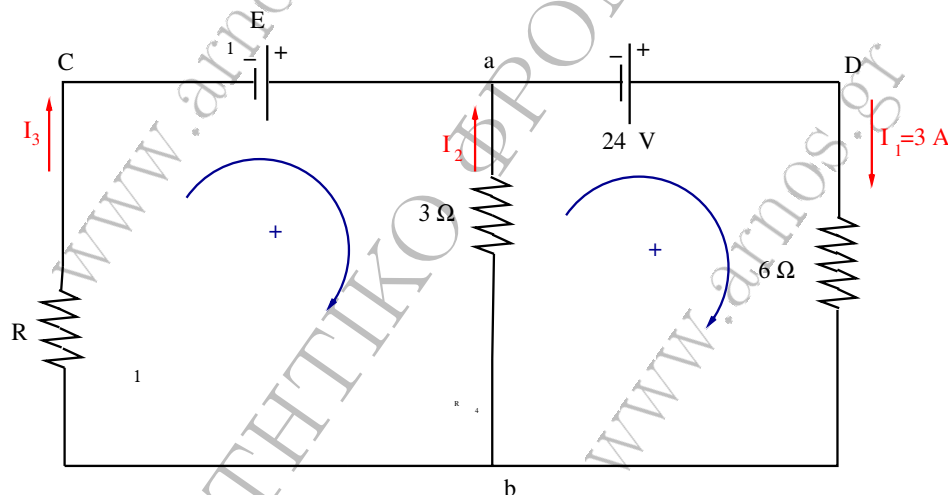
Θέμα 2ο

Στο παρακάτω κύκλωμα αν $R = 10 \Omega$ να βρείτε τα I_2 και I_3 (μον.1), και την ΗΕΔ της πηγής. (μον. 0.5)



ΛΥΣΗ :

1. Το κύκλωμα του σχήματος είναι:



Παρατηρούμε ότι εδώ έχουμε δύο κόμβους (a, b , τα σημεία στα οποία διακλαδίζεται το ρεύμα), τρεις κλάδους (ab, aCb, aDb) και τρεις βρόχους ($aCba, aDba, aCbDa$). Έστω n ο αριθμός των κόμβων και l ο αριθμός των βρόχων.

Επιλέγουμε φορές διαγραφής αυτές του σχήματος και στη συνέχεια εφαρμόζουμε 1ο κανόνα του Kirchhof σε $n - 1$ κόμβους (εδώ $n = 2$) και σε $l - 1$ βρόχους (εδώ $l = 3$)

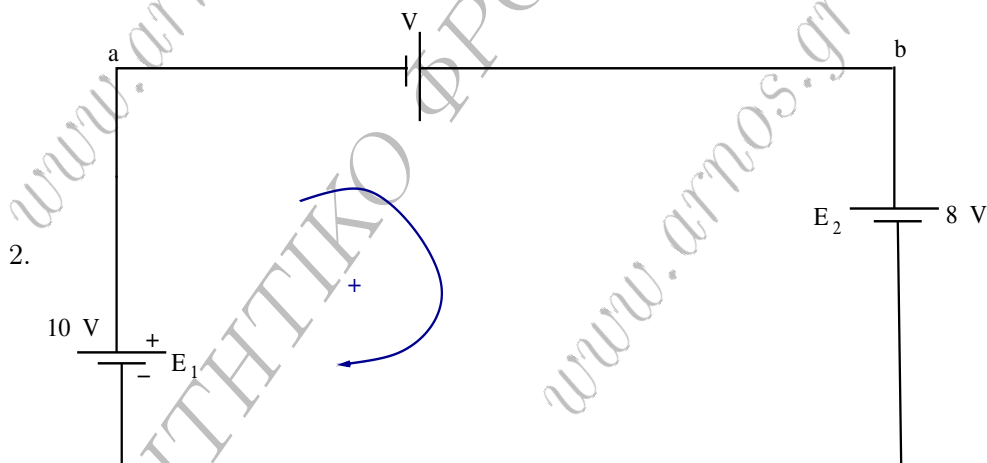
Οι κανόνες για τη σωστή αναγραφή των προσήμων σε ένα βρόχο στον οποίο γράφουμε τον 2ο κανόνα του Kirchhof είναι:

(α') Αν κατά τη διαγραφή του βρόχου συναντήσουμε πρώτα το πρόσημο (+) σε μια τάση αναφοράς, έχουμε μείωση δυναμικού και γράφουμε την τάση με πρόσημο μείον. Αν συναντήσουμε πρώτα το πρόσημο (-) έχουμε αύξηση δυναμικού και γράφουμε την τάση με πρόσημο συν.

(β') Αν κατά τη διαγραφή του βρόχου συναντήσουμε ομόρροπο με τη φορά διαγραφής ρεύμα που διαρρέει μια αντίσταση τότε γράφουμε την πτώση τάσης με πρόσημο μείον. Αν συναντήσουμε αντίρροπο ρεύμα να διαρρέει την αντίσταση τότε την πτώση τάσης με πρόσημο συν

Οι εξισώσεις που παίρνουμε είναι:

$$\begin{bmatrix} a & I_1 = I_2 + I_3 \\ \alpha\Delta\beta\alpha & 24 - 6I_1 - 3I_2 = 0 \\ \alpha'\beta\alpha & E + 3I_2 - I_3R = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 = I_2 + I_3 \\ 24 - 18 - 3I_2 = 0 \\ E + 3I_2 - 10I_3 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_3 = 1 \text{ A} \\ I_2 = 2 \text{ A} \\ E = 4 \text{ V} \end{bmatrix}$$



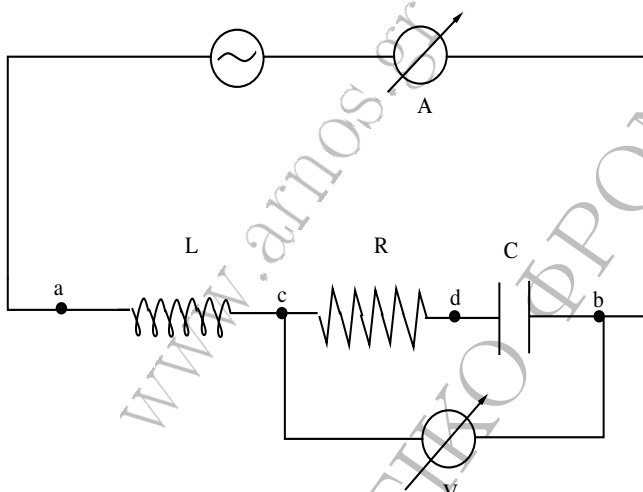
Ξαναγράφουμε τον Β κανόνα του Kirchhoff για τον βρόχο $CbDaC$ έχοντας αντικαταστήσει τον κλάδο ab με μια πηγή τάσης V με ίδια πολικότητα με την E_1 .

$$\begin{bmatrix} E_1 - E_2 + V = 0 \\ V = V_b - V_a \end{bmatrix} \Leftrightarrow 10 - 8 = V_a - V_b \Leftrightarrow V_a - V_b = 2 \text{ V}$$

Θέμα 3ο

Στα άκρα πηγής εναλλασσόμενης τάσης συνδέονται σε σειρά αντιστάτης $R = 100 \Omega$, πυκνωτής $C = 2\mu\text{F}$ και πηνίο $L = 0.9 \text{ H}$ και η στιγμιαία τιμή του ρεύματος που το διαρρέει είναι $i(t) = I \cos(400t)$. Το πλάτος τάσης στα άκρα της πηγής είναι 311 V .

1. Βρείτε την ένδειξη του αμπερομέτρου (μον.1)
2. Φτιάξτε διάγραμμα περιστρεφόμενων διανυσμάτων και πείτε τη συμπεριφορά εμφανίζει το κύκλωμα (επαγωγική ή χωρητική) εξηγώντας το (μον. 0.5)
3. Βρείτε ποια τάση θα μετρήσει το βολτόμετρο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (μον. 1);
4. Γράψτε τη σχέση που δίνει τη στιγμιαία τιμή της τάσης στα άκρα του πηνίου $v_L(t)$ (μον.0.5)
5. Τι ρύθμιση πρέπει να κάνω στην πηγή ώστε το κύκλωμα να έρθει σε συντονισμό; Εξηγήστε(μον (0.5)



ΛΥΣΗ :

Από τη στιγμιαία ένταση του ρεύματος βρίσκουμε την κυκλική συχνότητα της πηγής:

$$\begin{cases} i(t) = I \cos(400t) \\ i(t) = I \cos(\omega t) \end{cases} \iff \omega = 400 \text{ r/s}$$

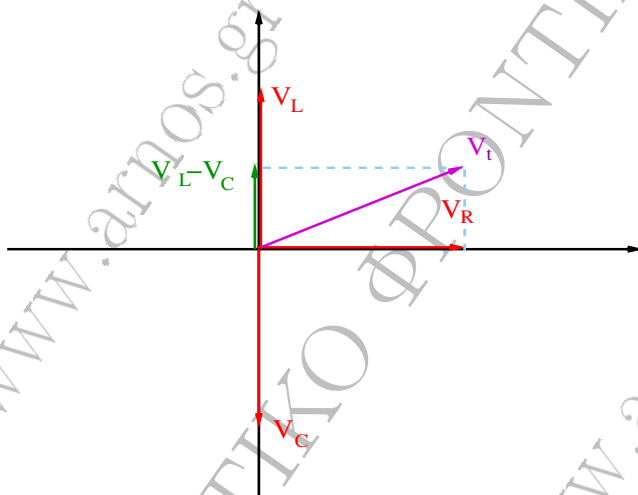
1. Το αμπερόμετρο μετρά ενεργές τιμές έντασης ρεύματος. Η συνολική εμπέδηση του κυκλώματος είναι:

$$\begin{cases} Z = \sqrt{(Z_L - Z_C)^2 + R^2} \\ Z_L = L\omega \\ Z_C = \frac{1}{C\omega} \end{cases} \iff Z = \sqrt{100^2 + \left(0.9 \cdot 400 - \frac{1}{2 \times 10^{-6} \cdot 400}\right)^2} = 895.6 \Omega$$

Η ενεργή τιμή του ρεύματος θα είναι:

$$\left[\begin{array}{l} I_{\text{Εν}} = \frac{V_{\text{Εν}}}{Z} \\ V_{\text{Εν}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \\ V_0 = 311 \text{ V} \\ Z = 895.6 \Omega \end{array} \right] \Leftrightarrow I_{\text{Εν}} = 0,245 \text{ A}$$

2. Το διάγραμμα των περιστρεφόμενων διανυσμάτων είναι:



Το είδος της συμπεριφοράς χαρακτηρίζεται από:

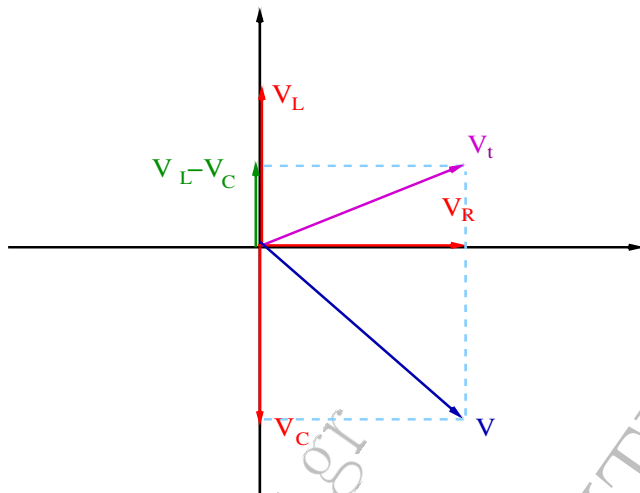
$$\left[\begin{array}{l} V_L - V_C > 0 \quad \text{επαγωγική} \\ V_L - V_C = 0 \quad \text{ωμική} \\ V_L - V_C < 0 \quad \text{χωρητική} \end{array} \right]$$

Στην περίπτωση μας:

$$\left[\begin{array}{l} V_L = IL\omega \\ V_C = I\frac{1}{C\omega} \end{array} \right] \Leftrightarrow V_L - V_C = I\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = I(360 - 1250) < 0$$

Επομένως η συμπεριφορά του κυκλώματος είναι χωρητική.

3. Το βολτόμετρο μετρά την ενεργό τάση ανάμεσα στα cb , δηλαδή την τάση V του διαγράμματος.



$$\left[\begin{array}{l} V = \sqrt{V_C^2 + V_R^2} \\ V_C = I_{\text{εν}} \frac{1}{C\omega} \\ V_R = I_{\text{εν}} R \end{array} \right] \Leftrightarrow V = I_{\text{εν}} \sqrt{(1250)^2 + 100^2} = 1254 \text{ V}$$

4. Τα πλάτη στις τρεις εμπεδήσεις θα είναι:

$$\left[\begin{array}{l} V_R = I_0 R \\ V_L = I_0 L\omega \\ V_C = I_0 \frac{1}{C\omega} \\ L\omega = 360 \Omega \\ \frac{1}{C\omega} = 1250 \Omega \\ I_{\text{εν}} = 0.245 \text{ A} \\ I_0 = \sqrt{2} I_{\text{εν}} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} V_R = 34.6 \text{ V} \\ V_L = 124.7 \text{ V} \\ V_C = 433.1 \text{ V} \end{array} \right]$$

Καθώς η τάση του πηνίου προηγείται κατά $\frac{\pi}{2}$ της τάσης της αντίστασης ενώ η τάση του πυκνωτή ακολουθεί

κατά $\frac{\pi}{2}$ την τάση της αντίστασης θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} v_R = 34.6 \cos(400t) \\ v_L = 124.7 \cos(400t + \frac{\pi}{2}) \\ v_C = 433.1 \cos(400t - \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

5. Σε συντονισμό θα έρθει το κύκλωμα όταν η επαγωγική εμπέδιση γίνει ίση με τη χωρητική. Καθώς τα L, C δεν μεταβάλλονται, θα πρέπει να μεταβληθεί η κυκλική συχνότητα της πηγής:

$$\begin{bmatrix} Z_L = L\omega \\ Z_C = \frac{1}{C\omega} \\ Z_L = Z_C \end{bmatrix} \iff \omega^2 = \frac{1}{LC} \iff \omega = 745.4 \text{ rad/s}$$

Θέμα 4ο

Έχεις στο σπίτι σου δύο λάμπες πυράκτωσης, η μια ισχύος 120 W και η άλλη 75 W και τάσης 220 V . Έστω ότι το νήμα βολφραμίου έχει το ίδιο πάχος και στις δύο, ποιος ο λόγος των μηκών των δύο νημάτων;

ΛΥΣΗ :

Η αντίσταση μπορεί να υπολογισθεί από την ισχύ από τη σχέση:

$$P = \frac{V^2}{R} \iff R = \frac{V^2}{P}$$

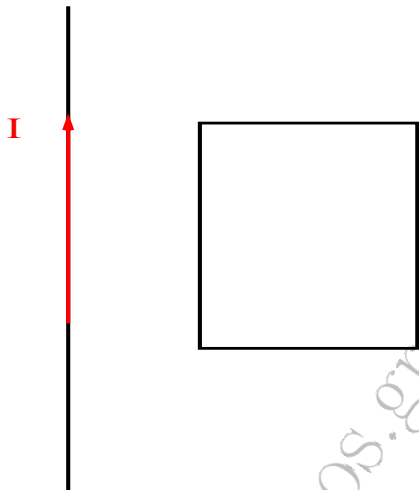
Για τα δύο νήματα θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} R_1 = \frac{V^2}{P_1} \\ P_1 = 120 \text{ W} \\ R_1 = \rho \frac{l_1}{S} \\ R_2 = \frac{V^2}{P_2} \\ P_2 = 75 \text{ W} \\ R_2 = \rho \frac{l_2}{S} \end{bmatrix} \iff \frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{V^2}{120}}{\frac{V^2}{75}} = \frac{\rho \frac{l_1}{S}}{\rho \frac{l_2}{S}} \iff$$

$$\frac{75}{120} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{5}{8}$$

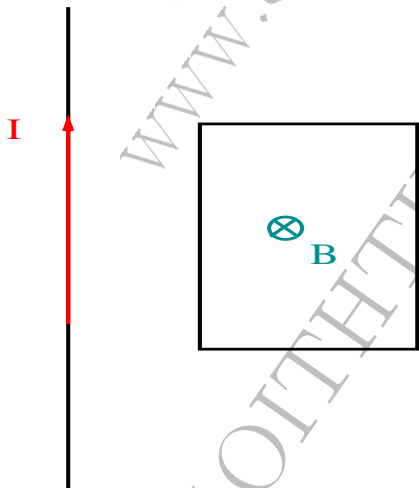
Θέμα 5ο

Ποια η φορά του επαγόμενου ρεύματος στον ορθογώνιο βρόχο του παρακάτω σχήματος αν τον απομακρύνουμε από τον ρευματοφόρο αγωγό κινώντας τον προς τα δεξιά; Εξηγήστε (μον. 1.5)



ΛΥΣΗ :

Το ρεύμα παράγει ένα μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του κυκλικού αγωγού. Το μαγνητικό αυτό πεδίο είναι όπως στο σχήμα (κανόνας δεξιού χεριού).



Η τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου σε απόσταση r από τον αγωγό δίνεται από τη σχέση:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

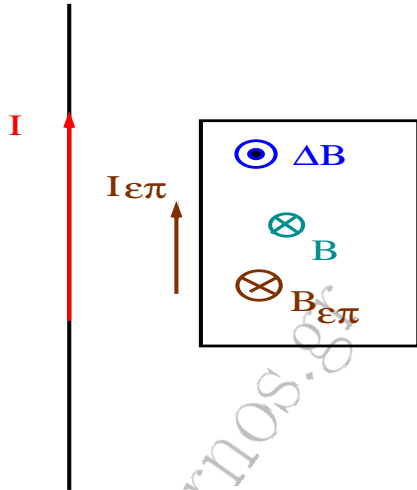
Καθώς απομακρύνεται ο βρόχος από τον αγωγό η τιμή του B θα μειώνεται και επομένως και η ροή που διαπερνά το βρόχο θα μειώνεται.

Η μαγνητική ροή που διαπερνά το βρόχο είναι

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Από τον νόμο του Faraday, θα δημιουργηθεί στο βρόχο ΗΕΔ από επαγωγή. Από τον κανόνα του Lenz το επαγόμενο ρεύμα θα έχει τέτοια φορά ώστε να δημιουργεί στο εσωτερικό του αγωγού μαγνητικό πεδίο τέτοιας φοράς ώστε η ροή του να αντισταθμίζει την μείωση της εξωτερικής μαγνητικής ροής.

Επομένως από τον κανόνα του δεξιού χεριού το ρεύμα θα έχει τη φορά του σχήματος.



Θέμα 6ο

Επίπεδος πυκνωτής φορτίζεται με τάση 200 V και παραμένει συνδεδεμένος στην πηγή. Αν η απόσταση μεταξύ των οπλισμών διπλασιασθεί βρείτε το λόγο U/U_0 όπου U_0 η αρχική αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή και U η ενέργεια μετά την απομάκρυνση των οπλισμών του. (μον.1) Ποια η ελλαγή στο ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του; (μον. 0.5)

ΛΥΣΗ :

Κανόνες για αυτές τις ασκήσεις:

1. Αν ο πυκνωτής παραμένει συνδεδεμένος στην πηγή τότε η τάση στα άκρα του παραμένει σταθερή.
2. Αν ο πυκνωτής αποσυνδεθεί από την πηγή τότε το φορτίο του παραμένει σταθερό

Στην περίπτωση μας ο πυκνωτής παραμένει συνδεδεμένος στην πηγή, επομένως έχει σταθερή τάση.

Η χωρητικότητα του πυκνωτή στις δύο περιπτώσεις δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} C = \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{l} \\ l_2 = 2l_1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} C_1 = \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{l_1} \\ C_2 = \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{l_2} \end{bmatrix} \iff C_1 = 2C_2$$

Η ενέργεια του πυκνωτή θα είναι:

$$U = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \iff \begin{cases} U_0 = \frac{C_1 V^2}{2} \\ U = \frac{C_2 V^2}{2} \end{cases} \xleftrightarrow{C_1=2C_2}$$

$$\frac{U}{U_0} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{2}$$

όπου επιλέξαμε τη σχέση για την ενέργεια όπου έχει μόνο μία μεταβλητή (την χωρητικότητα) και όχι και δεύτερη (το φορτίο).

Το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή δίνεται από:

$$E = \frac{V}{l}$$

Επομένως για τις δύο περιπτώσεις θα έχουμε ότι:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{V}{l_1} \\ E_2 = \frac{V}{l_2} \\ l_2 = 2l_1 \end{cases} \iff E_1 = 2E_2$$